

MATEMATICA DISCRETA II

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO
CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA
A.A. 2007/2008

4 giugno 2008

Si svolgano i seguenti esercizi e si risponda alla domanda di teoria. **Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata.** Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni.

Esercizio 1. Si dimostri per induzione su $n \in \mathbb{N}$ che, per ogni $n \geq 1$, vale:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

Esercizio 2. Si determinino tutte le soluzioni del seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} x \equiv -39 \pmod{42} \\ x \equiv -7 \pmod{26}. \end{cases}$$

Si dica inoltre se esiste una soluzione divisibile per 5.

Esercizio 3. Sia $A := \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 1, n \text{ divide } 30\}$ e sia $B := \{n \in A \mid (n, 9) = 1\}$. Si calcolino le cardinalità dei seguenti insiemi:

$$X := \{f \in A^B \mid f \text{ non è iniettiva}\},$$

$$Y := \{f \in A^A \mid \text{la restrizione di } f \text{ a } B \text{ è iniettiva}\},$$

$$Z := \{f \in A^B \mid |f(B)| = 2\}.$$

Esercizio 4. Si dica, motivando la risposta, quale dei seguenti vettori

$$d_1 = (2, 2, 2, 2, 2, 3, 5, 8, 8), \quad d_2 = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 4, 5)$$

è lo score di un grafo e, in caso lo sia, si costruisca un tale grafo. Si dica inoltre se

(4a) esiste un tale grafo che sia anche connesso,

(4b) esiste un tale grafo che sia anche 2-connesso,

(4c) esiste un tale grafo che sia anche un albero.

Domanda di teoria. Si dia la definizione di numero naturale rappresentabile in una data base. Si enunci e si dimostri il Teorema di rappresentazione dei numeri naturali in una base arbitraria maggiore o uguale di 2.