

# MATEMATICA DISCRETA II

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO  
CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA  
A.A. 2009/2010

4 giugno 2010

Si svolgano i seguenti esercizi e si risponda alla domanda di teoria. **Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata.** Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e della chiarezza delle spiegazioni.

**Esercizio 1.** Si dimostri per induzione su  $n \in \mathbb{N}$  che, per ogni  $n \geq 2$ , vale la seguente disuguaglianza:

$$n^3 - n^2 - n + 1 \geq 0.$$

**Esercizio 2.** Si determinino tutte le soluzioni del seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} x \equiv 89 \pmod{125} \\ x \equiv -3 \pmod{78}. \end{cases}$$

Si dica inoltre se esiste una soluzione positiva di tale sistema la cui somma delle cifre sia uguale a 11.

**Esercizio 3.** Sia  $A := \mathbb{Z}/128\mathbb{Z}$  e sia  $B := (\mathbb{Z}/128\mathbb{Z})^*$  il sottoinsieme di  $A$  delle classi invertibili modulo 128. Si calcoli la cardinalità dei seguenti insiemi  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ :

(4a)  $X := \{C \in 2^A \mid C \cap B = \emptyset\}$ ,

(4b)  $Y := \{f \in A^B \mid f \text{ è iniettiva e } f([3]_{128}) \neq [2]_{128}\}$ ,

(4c)  $Z := \{f \in A^A \mid f(B) = A \setminus B, f(A \setminus B) = A \setminus B\}$ .

**Esercizio 4.** Si dica, motivando la risposta, quale dei seguenti vettori

$$d_1 = (3, 4, 5, 8, 8, 9, 9, 10, 11, 11, 11, 11), \quad d_2 = (1, 1, 1, 1, 5, 5, 5, 5, 5, 5)$$

è lo score di un grafo e, in caso lo sia, si costruisca un grafo con tale score. Si dica inoltre se

(3a) esiste un grafo con tale score che sia connesso;

(3b) esiste un grafo con tale score che sia un albero;

(3c) esiste un grafo con tale score che abbia tre componenti connesse.

**Domanda di teoria.** Si diano le definizioni di grafo finito e di grado di un suo vertice. Si enunci e si dimostri la relazione fondamentale che, in un grafo finito, lega il numero dei lati e i gradi dei vertici. Si enunci e si dimostri inoltre il “lemma delle strette di mano”.