

MATEMATICA DISCRETA II

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO
CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA
A.A. 2009/2010

4 giugno 2010

Si svolgano i seguenti esercizi e si risponda alla domanda di teoria. **Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata.** Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e della chiarezza delle spiegazioni.

Esercizio 1. Si dimostri per induzione su $n \in \mathbb{N}$ che, per ogni $n \geq 2$, vale la seguente disuguaglianza:

$$n^3 - n^2 - n + 1 \geq 0.$$

Esercizio 2. Si determinino tutte le soluzioni del seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} x \equiv 89 \pmod{125} \\ x \equiv -3 \pmod{78}. \end{cases}$$

Si dica inoltre se esiste una soluzione positiva di tale sistema la cui somma delle cifre sia uguale a 11.

Esercizio 3. Sia $A := \mathbb{Z}/128\mathbb{Z}$ e sia $B := (\mathbb{Z}/128\mathbb{Z})^*$ il sottoinsieme di A delle classi invertibili modulo 128. Si calcoli la cardinalità dei seguenti insiemi X , Y e Z :

$$(4a) \quad X := \{C \in 2^A \mid C \cap B = \emptyset\},$$

$$(4b) \quad Y := \{f \in A^B \mid f \text{ è iniettiva e } f([3]_{128}) \neq [2]_{128}\},$$

$$(4c) \quad Z := \{f \in A^A \mid f(B) = A \setminus B, \quad f(A \setminus B) = A \setminus B\}.$$

Esercizio 4. Si dica, motivando la risposta, quale dei seguenti vettori

$$d_1 = (3, 4, 5, 8, 8, 9, 9, 10, 11, 11, 11, 11), \quad d_2 = (1, 1, 1, 1, 5, 5, 5, 5, 5, 5)$$

è lo score di un grafo e, in caso lo sia, si costruisca un grafo con tale score. Si dica inoltre se

(3a) esiste un grafo con tale score che sia connesso;

(3b) esiste un grafo con tale score che sia un albero;

(3c) esiste un grafo con tale score che abbia tre componenti connesse.

Domanda di teoria. Si diano le definizioni di grafo finito e di grado di un suo vertice. Si enunci e si dimostri la relazione fondamentale che, in un grafo finito, lega il numero dei lati e i gradi dei vertici. Si enunci e si dimostri inoltre il “lemma delle strette di mano”.