

MATEMATICA DISCRETA II

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO

CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA

A.A. 2008/2009

5 giugno 2009

Si svolgano i seguenti esercizi e si risponda alla domanda di teoria. **Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata.** Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni.

Esercizio 1. Si dimostri per induzione su $n \in \mathbb{N}$ che, per ogni intero $n \geq 1$, vale:

$$9 \cdot 4 + 18 \cdot 4^2 + 27 \cdot 4^3 + \dots + 9n \cdot 4^n = 4 + 4^{n+1}(3n - 1).$$

Esercizio 2. Si determinino tutte le soluzioni del seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} x \equiv -2 \pmod{96} \\ x \equiv 20 \pmod{170}. \end{cases}$$

Si dica inoltre se esiste una soluzione di tale sistema che sia divisibile per 4.

Esercizio 3. Sia $A := \mathbb{Z}/72\mathbb{Z}$, sia $B := (\mathbb{Z}/72\mathbb{Z})^*$ il sottoinsieme di A formato dalle classi invertibili modulo 72 e sia C un sottoinsieme di $A \setminus B$ avente cardinalità 24. Si calcoli la cardinalità dei seguenti insiemi:

$$\mathcal{X} := A \setminus (B \cup C);$$

$$\mathcal{Y} := \{f \in A^A \mid f(B) = C \text{ e } f(C) = B\};$$

$$\mathcal{Z} := \{f \in \mathcal{Y} \mid f(\mathcal{X}) \subset \mathcal{X}, |f(A)| = 49\}.$$

Esercizio 4. Si dica, motivando la risposta, quale dei seguenti vettori

$$d_1 = (2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 5), \quad d_2 = (0, 0, 0, 1, 1, 1, 3, 3, 4, 5, 6, 6, 10)$$

è lo score di un grafo e, in caso lo sia, si costruisca un tale grafo. Si dica inoltre se

(4a) esiste un tale grafo che sia hamiltoniano;

(4b) esiste un tale grafo che sia un albero;

(4c) esiste un tale grafo che abbia un 4-ciclo come una delle sue componenti connesse.

Domanda di teoria. Si diano le definizioni di passeggiata e di cammino in un grafo. Si diano inoltre le definizioni di congiungibilità con passeggiate e di congiungibilità con cammini di due vertici di un grafo. Si enunci e si dimostri infine il teorema di equivalenza tra congiungibilità con passeggiate e congiungibilità con cammini.