

## MATEMATICA DISCRETA II

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO

CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA

A.A. 2011/2012

5 giugno 2012

Si svolgano i seguenti esercizi e si risponda alla domanda di teoria. **Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata.** Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni.

**Esercizio 1.** Si dimostri per induzione su  $n \in \mathbb{N}$  che, per ogni intero  $n \geq 1$ , vale:

$$\frac{3}{3 \cdot 5} + \frac{3}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{3}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n}{2n+3}.$$

**Esercizio 2.** Si determinino tutte le soluzioni del seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} x \equiv 85 \pmod{102} \\ x \equiv 133 \pmod{264}. \end{cases}$$

Si dimostri inoltre che tutte le soluzioni di tale sistema sono divisibili per 17.

**Esercizio 3.** Sia  $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 11\}$ , sia  $B = \{n \in A \mid n^2 \leq 27\}$  e sia  $C = B \cup \{10, 11\}$ . Si calcoli la cardinalità dei seguenti insiemi:

$$X := A \setminus (B \cup C);$$

$$Y := \{f \in C^A \mid f(B) = B\};$$

$$Z := \{f \in Y \mid |f(A \setminus B)| = 2 \text{ e } f \text{ è surgettiva}\}.$$

**Esercizio 4.** Si dica, motivando la risposta, quale dei seguenti vettori

$$d_1 = (0, 0, 0, 3, 3, 4, 5, 7, 8, 8, 10, 10, 10, 10), \quad d_2 = (1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 7)$$

è lo score di un grafo e, in caso lo sia, si costruisca un grafo con tale score utilizzando il teorema dello score. Si dica inoltre se

(4a) esiste un grafo con tale score che abbia due componenti connesse;

(4b) esiste un grafo con tale score che sia 2-connesso;

(4c) esiste un grafo con tale score che sia un albero.

**Domanda di teoria.** Si enunci e si dimostri il Teorema di Fermat–Eulero. Si dica inoltre come tale risultato venga utilizzato nella crittografia RSA.