

MATEMATICA DISCRETA II

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO

CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA

A.A. 2008/2009

6 luglio 2009

Si svolgano i seguenti esercizi e si risponda alla domanda di teoria. **Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata.** Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e della chiarezza delle spiegazioni.

Esercizio 1. Si dimostri per induzione su $n \in \mathbb{N}$ che, per ogni intero $n \geq 1$, vale:

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}.$$

Esercizio 2. Si determinino tutte le soluzioni della seguente congruenza:

$$x^{17} \equiv 19 \pmod{120}.$$

Si dimostri inoltre che tutte le soluzioni positive di tale congruenza hanno la cifra delle unità uguale a 9.

Esercizio 3. Sia $A := \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 36 \text{ e } 3 \text{ divide } n\}$, sia B il sottoinsieme dei numeri naturali pari appartenenti ad A e sia $C := \{n \in B \mid n \leq 20\}$. Si calcoli la cardinalità dei seguenti insiemi:

$$\mathcal{X} := \{D \in 2^A \mid |D \cap B| = 2\};$$

$$\mathcal{Y} := \{f \in C^A \mid |f(A)| = 2\};$$

$$\mathcal{Z} := \{f \in B^A \mid |f(B)| > 2\}.$$

Esercizio 4. Si dica, motivando la risposta, quale dei seguenti vettori

$$d_1 = (1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 9, 9, 9, 11), \quad d_2 = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 4, 6)$$

è lo score di un grafo e, in caso lo sia, si costruisca un tale grafo. Si dica inoltre se

- (4a) esiste un tale grafo che sia una foresta;
- (4b) esiste un tale grafo che sia connesso;
- (4c) esiste un tale grafo che contenga un 3-ciclo.

Domanda di teoria. Si diano le definizioni di numero primo e di numeri interi coprimi. Si enunci e si dimostri il Teorema fondamentale dell'Aritmetica (fattorizzazione unica).