

## MATEMATICA DISCRETA II

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO  
CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA  
A.A. 2007/2008  
9 febbraio 2009

Si svolgano i seguenti esercizi e si risponda alla domanda di teoria. **Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata.** Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni.

**Esercizio 1.** Si dimostri per induzione su  $n \in \mathbb{N}$  che, per ogni intero  $n \geq 0$ , vale:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \dots + (2n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}.$$

**Esercizio 2.** Si determinino tutte le soluzioni della seguente congruenza:

$$x^5 \equiv 49 \pmod{171}.$$

Si dica inoltre se la precedente congruenza ammette una soluzione positiva avente 12 come somma delle cifre.

**Esercizio 3.** Michele possiede quattro bottiglie di acqua tra loro diverse, due bottiglie di olio tra loro diverse ed una bottiglia di vino. Si risponda ai seguenti quesiti:

- (3a) In quanti modi Michele può disporre le sette bottiglie su uno scaffale?
- (3b) In quanti modi Michele può disporre le sette bottiglie su uno scaffale in modo che le bottiglie di acqua stiano assieme ed anche quelle di olio stiano assieme?
- (3c) In quanti modi Michele può disporre le sette bottiglie su uno scaffale in modo che la bottiglia di vino stia tra le due bottiglie di olio?

**Esercizio 4.** Si dica, motivando la risposta, quale dei seguenti vettori

$$d_1 = (2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 8), \quad d_2 = (1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 5, 5, 7, 8, 14, 14)$$

è lo score di un grafo e, in caso lo sia, si costruisca un tale grafo. Si dica inoltre se

- (4a) esiste un tale grafo che sia un albero,
- (4b) esiste un tale grafo che sia hamiltoniano,
- (4c) esiste un tale grafo che sia sconnesso.

**Domanda di teoria.** Si diano le definizioni di passeggiata e di cammino in un grafo. Si diano inoltre le definizioni di congiungibilità con passeggiate e di congiungibilità con cammini di due vertici di un grafo. Si enunci e si dimostri infine il teorema di equivalenza tra congiungibilità con passeggiate e congiungibilità con cammini.