

MATEMATICA DISCRETA II

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO

CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA

A.A. 2007/2008

9 settembre 2008

Si svolgano i seguenti esercizi e si risponda alla domanda di teoria. **Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata.** Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni.

Esercizio 1. Si dimostri per induzione su $n \in \mathbb{N}$ che, per ogni $n \geq 2$, vale:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + (n-1) \cdot n = \frac{n \cdot (n^2 - 1)}{3}.$$

Esercizio 2. Si determinino tutte le soluzioni del seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} x \equiv 20 & (\text{mod } 84) \\ x \equiv -32 & (\text{mod } 136). \end{cases}$$

Si dica inoltre se esiste una soluzione positiva la cui cifra delle unità sia 5.

Esercizio 3. Sia $A := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e sia X l'insieme dei numeri naturali la cui scrittura decimale è formata da sette cifre appartenenti a A . Si risponda ai seguenti quesiti.

- (3a) Quanti numeri naturali appartenenti a X sono divisibili per 5?
- (3b) Quanti sono i numeri naturali appartenenti a X la cui scrittura decimale contiene esattamente tre cifre uguali a 1?
- (3c) Quanti sono i numeri naturali appartenenti a X la cui scrittura decimale contiene esattamente tre cifre uguali a 1 e tali cifre sono consecutive?

Esercizio 4. Si dica, motivando la risposta, quale dei seguenti vettori

$$d_1 = (3, 3, 4, 4, 4, 6, 9, 9, 9, 9), \quad d_2 = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 4, 4)$$

è lo score di un grafo e, in caso lo sia, si costruisca un tale grafo. Si dica inoltre se

- (4a) esiste un tale grafo che sia anche 2-connesso,
- (4b) esiste un tale grafo che sia anche un albero,
- (4c) esiste un tale grafo che abbia anche un 3-ciclo come una delle sue componenti connesse.

Domanda di teoria. Si diano le definizioni di grafo finito e di grado di un suo vertice. Si enunci e si dimostri la relazione fondamentale che, in un grafo finito, lega il numero dei lati e i gradi dei vertici. Si enunci e si dimostri inoltre il “lemma delle strette di mano”.