

# MATEMATICA DISCRETA II

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO  
CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA  
A.A. 2006/2007

10 gennaio 2008

Si svolgano i seguenti esercizi e si risponda alla domanda di teoria. **Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata.** Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni.

**Esercizio 1.** Provare per induzione su  $n$  che, per ogni intero  $n \geq 1$ , vale:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

**Esercizio 2.** Si determinino, se esistono, tutte le soluzioni del seguente sistema di congruenze

$$\begin{cases} x \equiv 48 & (\text{mod } 108) \\ x \equiv -12 & (\text{mod } 42). \end{cases}$$

Si determini inoltre la massima soluzione negativa di tale sistema.

**Esercizio 3.** Definiamo gli insiemi  $X := \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 13, n \text{ divide } 12\}$ ,  $A = \{n \in X \mid 3 \text{ divide } n\}$ ,  $Y := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  e  $B := \{n \in Y \mid n^2 \leq 9\}$ . Si risponda ai seguenti quesiti:

- (3a) Si dica quanti sono i numeri dispari di tre cifre, le cui cifre appartengono a  $Y$ .
- (3b) Si calcolino le cardinalità degli insiemi  $Y^X$  e  $Z := \{f \in Y^X \mid f \text{ non è iniettiva}\}$ .
- (3c) Si determini la cardinalità di  $W := \{f \in Y^X \mid f \text{ è iniettiva e } f(A) \subset B\}$ .

**Esercizio 4.** Si dica, motivando la risposta, quale dei seguenti vettori

$$d_1 = (1, 2, 2, 2, 2, 3, 5, 6, 8), \quad d_2 = (1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 5)$$

è lo score di un grafo e, in caso lo sia, si costruisca un tale grafo. Si dica inoltre se esiste un tale grafo che sia anche

- (4a) connesso,
- (4b) sconnesso,
- (4c) un albero.

**Domanda di teoria.** Si diano le definizioni di funzione  $\Phi$  di Eulero e di elemento invertibile in  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , ove  $n$  è un intero positivo. Si enunci e si dimostri il Piccolo teorema di Fermat.