

MATEMATICA DISCRETA II

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO
CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA
A.A. 2006/2007

10 gennaio 2008

Si svolgano i seguenti esercizi e si risponda alla domanda di teoria. **Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata.** Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni.

Esercizio 1. Provare per induzione su n che, per ogni intero $n \geq 1$, vale:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

Esercizio 2. Si determinino, se esistono, tutte le soluzioni del seguente sistema di congruenze

$$\begin{cases} x \equiv 48 & (\text{mod } 108) \\ x \equiv -12 & (\text{mod } 42). \end{cases}$$

Si determini inoltre la massima soluzione negativa di tale sistema.

Esercizio 3. Definiamo gli insiemi $X := \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 13, n \text{ divide } 12\}$, $A = \{n \in X \mid 3 \text{ divide } n\}$, $Y := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $B := \{n \in Y \mid n^2 \leq 9\}$. Si risponda ai seguenti quesiti:

- (3a) Si dica quanti sono i numeri dispari di tre cifre, le cui cifre appartengono a Y .
- (3b) Si calcolino le cardinalità degli insiemi Y^X e $Z := \{f \in Y^X \mid f \text{ non è iniettiva}\}$.
- (3c) Si determini la cardinalità di $W := \{f \in Y^X \mid f \text{ è iniettiva e } f(A) \subset B\}$.

Esercizio 4. Si dica, motivando la risposta, quale dei seguenti vettori

$$d_1 = (1, 2, 2, 2, 2, 3, 5, 6, 8), \quad d_2 = (1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 5)$$

è lo score di un grafo e, in caso lo sia, si costruisca un tale grafo. Si dica inoltre se esiste un tale grafo che sia anche

- (4a) connesso,
- (4b) sconnesso,
- (4c) un albero.

Domanda di teoria. Si diano le definizioni di funzione Φ di Eulero e di elemento invertibile in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, ove n è un intero positivo. Si enunci e si dimostri il Piccolo teorema di Fermat.