

MATEMATICA DISCRETA II

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO

CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA

A.A. 2011/2012

10 giugno 2014

Si svolgano i seguenti esercizi e si risponda alla domanda di teoria. **Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata.** Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni.

Esercizio 1. Si dimostri per induzione su $n \in \mathbb{N}$ che, per ogni intero $n \geq 2$, vale:

$$6 + 24 + 54 + \cdots + 6n^2 = n(n+1)(2n+1).$$

Esercizio 2. Si determinino tutte le soluzioni del seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} x \equiv 9 & (\text{mod } 162) \\ x \equiv -9 & (\text{mod } 114). \end{cases}$$

Si dica inoltre se tale sistema possiede una soluzione divisibile per 17.

Esercizio 3. Siano $A := \mathbb{Z}/76\mathbb{Z}$, $B := (\mathbb{Z}/76\mathbb{Z})^*$ e $C := \{[2]_{76}, [38]_{76}, [57]_{76}\}$. Si calcoli la cardinalità dei seguenti insiemi:

$$X := A \setminus (B \setminus C);$$

$$Y := \{D \in 2^A \mid B \subset D, D \cap C = \emptyset\};$$

$$Z := \{f \in A^A \mid |f(B)| = 36\}.$$

Esercizio 4. Si dica, motivando la risposta, quale dei seguenti vettori

$$d_1 = (2, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 7, 7), \quad d_2 = (1, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 8, 8, 9)$$

è lo score di un grafo e, in caso lo sia, si costruisca un grafo con tale score utilizzando il teorema dello score. Si dica inoltre se

(4a) esiste un grafo con tale score che sia hamiltoniano;

(4b) esiste un grafo con tale score che sia sconnesso;

(4c) esiste un grafo con tale score che sia un albero.

Domanda di teoria. Si diano le definizioni di albero e di albero finito. Si enunci e si dimostri il teorema di caratterizzazione degli alberi finiti mediante la formula di Eulero.