

MATEMATICA DISCRETA II

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO

CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA

A.A. 2007/2008

12 gennaio 2009

Si svolgano i seguenti esercizi e si risponda alla domanda di teoria. **Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata.** Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni.

Esercizio 1. Si dimostri per induzione su $n \in \mathbb{N}$ che, per ogni intero $n \geq 5$, vale:

$$2^n > n^2 - \frac{1}{2}.$$

Si calcoli inoltre il minimo intero $m \in \mathbb{N}$ per cui la precedente disuguaglianza sia valida per ogni $n \geq m$.

Esercizio 2. Si determinino tutte le soluzioni del seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} x \equiv 45 \pmod{95} \\ x \equiv 80 \pmod{135}. \end{cases}$$

Si determini inoltre la massima soluzione negativa di tale sistema.

Esercizio 3. Sia A un insieme avente 20 elementi e siano B e C due sottoinsiemi disgiunti di A aventi ciascuno 4 elementi. Si calcoli la cardinalità dei seguenti insiemi \mathcal{X} , \mathcal{Y} e \mathcal{Z} :

$$\mathcal{X} := \{f \in A^A \mid f \text{ è iniettiva}\},$$

$$\mathcal{Y} := \{f \in \mathcal{X} \mid f(B) \subset C\},$$

$$\mathcal{Z} := \{D \in 2^A \mid B \subset D \text{ e } D \cap C = \emptyset\}.$$

Esercizio 4. Si dica, motivando la risposta, quale dei seguenti vettori

$$d_1 = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4), \quad d_2 = (1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 5, 6, 6, 7, 8, 8)$$

è lo score di un grafo e, in caso lo sia, si costruisca un tale grafo. Si dica inoltre se

(4a) esiste un tale grafo che sia hamiltoniano,

(4b) esiste un tale grafo che non abbia cicli,

(4c) esiste un tale grafo che sia connesso.

Domanda di teoria. Si enunci e si dimostri il teorema di Fermat–Eulero. Si dica inoltre come tale risultato venga utilizzato nella crittografia RSA.