

MATEMATICA DISCRETA II

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO

CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA

A.A. 2009/2010

12 gennaio 2011

Si svolgano i seguenti esercizi e si risponda alla domanda di teoria. **Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata.** Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni.

Esercizio 1. Si dimostri per induzione su $n \in \mathbb{N}$ che, per ogni intero $n \geq 1$, vale:

$$\frac{4}{3} + \frac{8}{3^2} + \frac{12}{3^3} + \dots + \frac{4n}{3^n} = 3 - \frac{2n+3}{3^n}.$$

Esercizio 2. Si determinino tutte le soluzioni del seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} x \equiv -4 \pmod{402} \\ x \equiv -37 \pmod{279}. \end{cases}$$

Si dica inoltre se esiste una soluzione positiva di tale sistema che sia divisibile per 9.

Esercizio 3. Sia $A := \mathbb{Z}/50\mathbb{Z}$ e sia $B := (\mathbb{Z}/50\mathbb{Z})^*$ il sottoinsieme di A formato dalle classi invertibili modulo 50. Si calcoli la cardinalità dei seguenti insiemi:

$$X := \{C \in 2^A \mid B \subset C\};$$

$$Y := \{f \in A^A \mid f(B) = B\};$$

$$Z := \{f \in Y \mid f \text{ è iniettiva}\}.$$

Esercizio 4. Si dica, motivando la risposta, quale dei seguenti vettori

$$d_1 = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 6), \quad d_2 = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 4, 4, 6)$$

è lo score di un grafo e, in caso lo sia, si costruisca un grafo con tale score utilizzando il teorema dello score. Si dica inoltre se

- (4a) esiste un grafo con tale score che sia hamiltoniano;
- (4b) esiste un grafo con tale score che abbia esattamente tre componenti connesse;
- (4c) esiste un grafo con tale score che sia un albero.

Domanda di teoria. Si dia la definizione di numero naturale rappresentabile in una data base. Si enunci e si dimostri il Teorema di rappresentazione dei numeri naturali in una base arbitraria maggiore o uguale di 2.