

MATEMATICA DISCRETA II

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO
CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA
A.A. 2006/2007

12 giugno 2007

Si svolgano i seguenti esercizi e si risponda alla domanda di teoria. **Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata.** Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni.

Esercizio 1. Si enunci il principio di induzione nella prima forma. Si utilizzi tale principio per dimostrare che, per ogni intero $n \geq 1$, vale:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Esercizio 2. Si determinino tutte le soluzioni del seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} x \equiv -44 \pmod{48} \\ x \equiv 72 \pmod{28}. \end{cases}$$

Si determini inoltre la minima soluzione positiva di tale sistema.

Esercizio 3. Sia $A := \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e sia $B := A \cup \{6, 7, 8, 9, 10\}$. Si calcolino le cardinalità degli insiemi X_1 , X_2 e X_3 definiti come segue:

$$\begin{aligned} X_1 &:= \{C \in 2^B \mid C \cap A = \emptyset\}, \\ X_2 &:= \{f \in B^B \mid f(B) \cap A = \emptyset\}, \\ X_3 &:= \{f \in B^B \mid f(A) = B \setminus A\}. \end{aligned}$$

Esercizio 4. Si dica, motivando la risposta, quale dei seguenti vettori

$$d_1 = (1, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 9, 9), \quad d_2 = (1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 4, 5, 6)$$

è lo score di un grafo e, in caso lo sia, si costruisca un tale grafo. Si dica inoltre se esiste un tale grafo che sia anche

- (4a) un albero,
- (4b) sconnesso,
- (4c) connesso.

Domanda di teoria. Si diano le definizioni di grafo finito e di grado di un suo vertice. Si enunci e si dimostri la relazione fondamentale che, in un grafo finito, lega il numero dei lati e i gradi dei vertici.