

MATEMATICA DISCRETA II

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO
CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA
A.A. 2008/2009
13 gennaio 2010

Si svolgano i seguenti esercizi e si risponda alla domanda di teoria. **Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata.** Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e della chiarezza delle spiegazioni.

Esercizio 1. Si dimostri per induzione su $n \in \mathbb{N}$ che, per ogni intero $n \geq 1$, vale:

$$\frac{2}{1! \cdot 3} + \frac{2}{2! \cdot 4} + \frac{2}{3! \cdot 5} + \dots + \frac{2}{n! \cdot (n+2)} = 1 - \frac{2}{(n+2)!}.$$

Esercizio 2. Si determinino tutte le soluzioni del seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} x \equiv 52 \pmod{126} \\ x \equiv -11 \pmod{91}. \end{cases}$$

Si dica inoltre se esiste una soluzione di tale sistema che sia divisibile per 101.

Esercizio 3. Sia $A := \{n \in \mathbb{N} \mid 2 \leq n \leq 15\}$, sia $B := \{n \in A \mid n \text{ è primo}\}$ e sia $C := \{n \in B \mid n \geq 7\}$. Si calcoli la cardinalità dei seguenti insiemi X , Y e Z :

(3a) $X := A \setminus (B \cup C)$,

(3b) $Y := \{f \in A^B \mid f \text{ è iniettiva e } C \cap f(B) = \emptyset\}$,

(3c) $Z := \{f \in A^B \mid f \text{ è iniettiva e } |X \cap f(B)| = 3\}$.

Esercizio 4. Si dica, motivando la risposta, quale dei seguenti vettori

$$d_1 = (1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4), \quad d_2 = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4)$$

è lo score di un grafo e, in caso lo sia, si costruisca un tale grafo. Si dica inoltre se

(3a) esiste un tale grafo che sia hamiltoniano;

(3b) esiste un tale grafo che sia un albero;

(3c) esiste un tale grafo che abbia quattro componenti connesse.

Domanda di teoria. Si diano le definizioni di grafo finito e di grado di un suo vertice. Si enunci e si dimostri la relazione fondamentale che, in un grafo finito, lega il numero dei lati e i gradi dei vertici.