

MATEMATICA DISCRETA II

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO

CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA

A.A. 2011/2012

22 agosto 2012

Si svolgano i seguenti esercizi e si risponda alla domanda di teoria. **Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata.** Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni.

Esercizio 1. Si dimostri per induzione su $n \in \mathbb{N}$ che, per ogni intero $n \geq 1$, vale:

$$3 \cdot 4 + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^3 + \dots + 3 \cdot 4^n = 4^{n+1} - 4.$$

Si deduca da questa uguaglianza che, per ogni $n \geq 1$, il numero intero $4^{n+1} - 4$ è multiplo di 3.

Esercizio 2. Si determinino tutte le soluzioni del seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} x \equiv 122 \pmod{210} \\ x \equiv 66 \pmod{77}. \end{cases}$$

Si dica inoltre se esiste una soluzione positiva di tale sistema la cui cifra delle decine è uguale a 7.

Esercizio 3. La mamma di Giovanni ha a disposizione 8 palline rosse tra loro diverse, 4 nere tra loro diverse, 3 gialle tra loro diverse, 6 blu tra loro distinte e 5 verdi tra loro diverse.

- (3a) La mamma dà a Giovanni 2 palline rosse, una gialla, 4 blu e 2 nere. In quanti modi si può ottenere un tale insieme di palline?
- (3b) Giovanni chiede di avere anche 2 palline verdi. In che modo cambia il numero determinato al punto precedente?
- (3c) Giovanni decide di regalare ad un suo amico 3 delle sue palline: una rossa, una blu e una nera. In quanti modi Giovanni può selezionare queste tre palline?

Esercizio 4. Si dica, motivando la risposta, quale dei seguenti vettori

$$d_1 = (1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 8, 8, 8), \quad d_2 = (1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5)$$

è lo score di un grafo e, in caso lo sia, si costruisca un grafo con tale score utilizzando il teorema dello score. Si dica inoltre se

- (4a) esiste un grafo con tale score che abbia un 4-ciclo come una delle sue componenti connesse;
- (4b) esiste un grafo con tale score che sia 2-connesso;
- (4c) esiste un grafo con tale score che sia un albero.

Domanda di teoria. Si dia la definizione di grafo finito e di grado di uno dei suoi vertici. Si enunci e si dimostri quindi la relazione fondamentale tra la somma dei gradi e il numero dei lati di un grafo finito.