

## MATEMATICA DISCRETA II

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO

CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA

A.A. 2009/2010

23 agosto 2010

Si svolgano i seguenti esercizi e si risponda alla domanda di teoria. **Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata.** Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni.

**Esercizio 1.** Si dimostri per induzione su  $n \in \mathbb{N}$  che, per ogni intero  $n \geq 0$ , vale:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 5} + \dots + \frac{2}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{2n+2}{3n+4}.$$

**Esercizio 2.** Si determinino tutte le soluzioni del seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} x \equiv -63 \pmod{267} \\ x \equiv 75 \pmod{186}. \end{cases}$$

Si dica inoltre se esiste una soluzione di tale sistema divisibile per 5.

**Esercizio 3.** Sia  $A$  un insieme tale che  $|A| = 8$  e siano  $a$  e  $b$  due elementi distinti di  $A$ . Si calcoli la cardinalità dei seguenti insiemi:

$$X := \{C \in 2^A \mid a \notin C \text{ e } b \notin C\};$$

$$Y := \{f \in A^A \mid f(\{a, b\}) \subset \{a, b\}\};$$

$$Z := \{f \in Y \mid f \text{ è surgettiva}\}.$$

**Esercizio 4.** Si dica, motivando la risposta, quale dei seguenti vettori

$$d_1 = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11), \quad d_2 = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 4, 5, 5)$$

è lo score di un grafo e, in caso lo sia, si costruisca un grafo con tale score utilizzando il teorema dello score. Si dica inoltre se

- (4a) esiste un grafo con tale score che abbia tre componenti connesse;
- (4b) esiste un grafo con tale score che sia 2-connesso;
- (4c) esiste un grafo con tale score che sia un albero.

**Domanda di teoria.** Si enunci e si dimostri il Teorema di Fermat–Eulero. Si dica inoltre come tale risultato venga utilizzato nella crittografia RSA.