

MATEMATICA DISCRETA II

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO
CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA
A.A. 2013/2014

26 agosto 2014

Si svolgano i seguenti esercizi e si risponda alla domanda di teoria. **Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata.** Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni.

Esercizio 1. Si dimostri per induzione su $n \in \mathbb{N}$ che, per ogni intero $n \geq 1$, vale:

$$5 + 5^2 + \dots + 5^n = \frac{5^{n+1} - 5}{4}.$$

Dedurre dalla precedente uguaglianza che, per ogni $n \geq 1$, l'intero $5^{n+1} - 5$ è divisibile per 20.

Esercizio 2. Si determinino tutte le soluzioni del seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} x \equiv 1 & (\text{mod } 111) \\ x \equiv 55 & (\text{mod } 63). \end{cases}$$

Si dica inoltre se tale equazione possiede una soluzione positiva la cui cifra delle decine è 8.

Esercizio 3. Siano $A := \{n \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq n \leq 20\}$, $B := \{n \in A \mid n \text{ è il quadrato di un numero intero pari}\}$ e $C := \{n \in A \mid n \text{ è divisibile per } 8\}$. Si calcoli la cardinalità dei seguenti insiemi:

$$X := A \setminus (B \setminus C);$$

$$Y := \{D \in 2^A \mid D \cap B = \emptyset, D \cap C \neq \emptyset\};$$

$$Z := \{f \in A^A \mid f(A) = A, f(B) = C\}.$$

Esercizio 4. Si dica, motivando la risposta, quale dei seguenti vettori

$$d_1 = (1, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 6, 7, 7), \quad d_2 = (2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 7)$$

è lo score di un grafo e, in caso lo sia, si costruisca un grafo con tale score utilizzando il teorema dello score. Si dica inoltre se

- (4a) esiste un grafo con tale score che sia hamiltoniano;
- (4b) esiste un grafo con tale score che abbia due componenti connesse;
- (4c) esiste un grafo con tale score che sia un albero.

Domanda di teoria.