MATEMATICA DISCRETA II

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in Informatica
A.A. 2006/2007

30 agosto 2007

Si svolgano i seguenti esercizi e si risponda alla domanda di teoria. **Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata**. Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni.

Esercizio 1. Si dimostri per induzione su n che, per ogni intero $n \geq 1$, vale:

$$1 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}.$$

Esercizio 2. Si determinino tutte le soluzioni della seguente congruenza

$$x^{11} \equiv 25 \pmod{62}.$$

Si determinino inoltre le soluzioni positive e minori di 100 di tale congruenza.

Esercizio 3. Sia $A := \{n \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq n \leq 16\}$ e sia $B := \{n \in A \mid 3 \text{ divide } n\}$. Si calcolino le cardinalità dei seguenti insiemi P , Q e R:
$P := \{f \in A^B \mid f \text{ è iniettiva}\}$,
$Q := \{f \in A^B \mid f \text{ è iniettiva e } f(3) = 4\}$,
$R := \{C \in 2^A \mid \text{la cardinalità di } C \cap B \text{ è uguale a } 3\}$.

Esercizio 4. Si dica, motivando la risposta, quale dei seguenti vettori

$$d_1 = (1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 9, 9), \qquad d_2 = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 4, 5)$$

è lo score di un grafo e, in caso lo sia, si costruisca un tale grafo. Si dica inoltre se
(4a) esiste un tale grafo che sia anche 2–connesso,
(4b) esiste un tale grafo che sia anche sconnesso,
(4c) esiste un tale grafo che sia anche un albero.

Domanda di teoria. Si diano le definizioni di passeggiata e di cammino in un grafo. Si diano inoltre le definizioni di congiungibilità con passeggiate e di congiungibilità con cammini di due vertici di un grafo. Si enunci e si dimostri infine il teorema di equivalenza tra congiungibilità con passeggiate e congiungibilità con cammini.