UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di laurea in Matematica

TESI specialistica

GRUPPI ABELIANI DI AUTOMORFISMI DI SUPERFICI DI RIEMANN

RELATORE:
Prof.
Roberto Pignatelli

LAUREANDA:
Carmen Raso

Anno Accademico 2009-2010

Indice

Prefazione

Nel 1890 in [17] Schwartz dimostrò che una superficie di Riemann compatta di genere $g \geq 2$ ha un numero finito di automorfismi. Più precisamente nel 1893 in [14], per mezzo della formula di Riemann-Hurwitz, Hurwitz dimostrò che una superficie di Riemann di genere $g \geq 2$ ha al più $84(g-1)$ automorfismi.
Le superfici di Riemann che hanno esattamente $84(g-1)$ automorfismi si dicono *Curve di Hurwitz* ed i loro gruppi di automorfismi *Gruppi di Hurwitz.* Hurwitz dimostrò inoltre che un gruppo finito è un gruppo di Hurwitz se e solo se ha 3 generatori a, b, c di ordine rispettivamente $2, 3, 7$, tali che $abc = 1$. La curva di Hurwitz di genere più basso viene detta *Quartica di Klein* e si tratta della curva piana proiettiva di genere 3 di equazione

$$\left\{x^3y + y^3z + z^3x = 0\right\} \subset \mathbb{P}^2.$$

Già prima del lavoro di Hurwitz, nel 1879, Klein trovò tutti i suoi automorfismi, che formano il gruppo semplice di ordine 168, e dimostrò che esiste un rivestimento di grado 168 da questa curva su $\mathbb{P}^1$ con tre valori critici di "indici" $2, 3, 7$.
Con ipotesi più restrittive si trovano limitazioni migliori: nel 1879 Wiman ([18]) dimostrò che l'ordine di un gruppo ciclico di automorfismi di una superficie di Riemann non può superare $4g+2$. In [15] Nakajima dimostrò che la limitazione dell'ordine di un gruppo abeliano è di $4g + 4$.

Approfondiremo la ricerca delle superfici di Riemann con "molti" automorfismi e introdurremo formalmente questo concetto definendo i gruppi di automorfismi *large* (definizione introdotta da Kulkarni) e *quasi large* (definizione introdotta da noi).
Data C una superficie di Riemann compatta di genere $g_C \geq 2$ e G sottogruppo di $\mathrm{Aut}(C)$ si dice che G è un gruppo *large* se $|G| > 4(g_C - 1)$. Usando la formula di Riemann-Hurwitz in [3] Kulkarni dimostra che se G è un gruppo large di automorfismi di una superficie di Riemann C e $C' = C/G$, allora $g_{C'} = 0$ e la proiezione può avere solo 3 o 4 valori critici.
Usando strumenti di geometria algebrica e in particolare il teorema di Pardini sui rivestimenti abeliani [16], Clelia Lomuto nella sua tesi [10] ha sviluppato i risultati di Kulkarni ottenendo la lista completa delle superfici di

Riemann aventi un gruppo large di automorfismi abeliano. Abbiamo riassunto la lista di Lomuto nella tabella 5.1.

La tesi ha due obiettivi:

(a) Ridimostrare i risultati di Lomuto con metodi elementari; in particolare sviluppando un metodo elementare basato sul classico teorema d'esistenza di Riemann 4.2.3 che ci consente di evitare di usare la geometria algebrica.

(b) Con gli stessi metodi estendere i risultati di Lomuto indebolendo l'ipotesi $|G| > 4(g_C - 1)$.
Come già noto a Kulkarni, è possibile costruire superfici di Riemann di genere g_C arbitrariamente alto con gruppo di automorfismi G con $|G| = 4(g_C - 1)$ e C/G di genere 1. La proiezione ha esattamente un valore critico. Nel lemma 5.1.1 dimostriamo che questo caso non si può verificare se supponiamo G abeliano.
Per rendere la condizione sull'ordine di G meno restrittiva possibile, abbiamo considerato la disuguaglianza $|G| > a(g_C - 1)$ e così trovato $a < 4$ minimo, tale per cui la condizione su G continui a garantire la non esistenza di alcun rivestimento abeliano di una curva ellittica C'.
Abbiamo ottenuto che tale valore numerico è $a_{\min} = 2$ e abbiamo così definito il gruppo *quasi large*: $|G| > 2(g_C - 1)$.
Usando la formula di Riemann-Hurwitz si può dunque dimostrare che se G è un gruppo quasi large abeliano di automorfismi di una superficie di Riemann C e $C' = C/G$ allora $g_{C'} = 0$, e la proiezione $p\colon C \longrightarrow C'$ può avere solo $3, 4$ o 5 valori critici. Nella tabella 1 riassumiamo i casi ottenuti.

Osserviamo che questa lista di gruppi abeliani include molti più casi rispetto a quella trovata da Lomuto imponendo G gruppo large.
Il grafico 1 ci aiuta a chiarire: sull'asse delle ascisse troviamo il genere della superficie di Riemann C su cui agisce G e sull'asse delle ordinate invece l'ordine del gruppo abeliano G. Osserviamo che $g \geq 2$.
L'area gialla e l'area azzurra evidenziano la zona in cui si trovano i casi ottenuti imponendo G gruppo quasi large. È evidente che la zona limitata dalle rette $|G| = 4(g+1)$ e $|G| = 2(g-1)$ è molto maggiore della zona gialla limitata dalle rette $|G| = 4(g+1)$ e $|G| = 4(g-1)$, cioè della zona classificata da Lomuto.

	Gruppo abeliano	Genere di C: $g \geq 2$
	Cinque valori critici	
(a)	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	2
(b)	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	3
(c)	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	5
(d)	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$	6
	Quattro valori critici	
(a)	$\mathbb{Z}_{2g}$	g
(b)	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{g+1}$	g
(c)	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{g+2}$	$4t, \quad t \in \mathbb{Z}^{\geq 1}$
(d)	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{\frac{g+3}{2}}$	$4t-3, \quad t \in \mathbb{Z}^{\geq 2}$
(e)	$\mathbb{Z}_6$	3
(f)	$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$	7
(g)	$\mathbb{Z}_{12}$	6
(h)	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12}$	11
(i)	$\mathbb{Z}_{30}$	15
(j)	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$	6
(k)	$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$	16
(l)	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$	7
(m)	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$	13
(n)	$\mathbb{Z}_3$	2
(o)	$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$	4
(p)	$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$	10
(q)	$\mathbb{Z}_{12}$	6
(r)	$\mathbb{Z}_{15}$	8
	Tre valori critici	
$*$	$\mathbb{Z}_\alpha \times \mathbb{Z}_{\alpha\beta\delta_1\delta_2\delta_3}$	$1 + f(\alpha, \beta, \delta_1, \delta_2, \delta_3)$

Tabella 1: La lista dei gruppi abeliani quasi large con il genere delle superfici di Riemann C su cui agiscono. $*$ dove, nel caso dei tre valori critici, $\alpha, \beta, \delta_1, \delta_2$ e δ_3 sono cinque numeri naturali qualunque tali che $\forall i \neq j$, $\gcd(\delta_i, \delta_j) = 1$ e inoltre tali che $\delta_1\delta_2\delta_3\,(\beta+1)$ sia pari e $f(\alpha, \beta, \delta_1, \delta_2, \delta_3) = \dfrac{\alpha}{2}\left\{\alpha\beta\delta_1\delta_2\delta_3 - \delta_1 - \delta_2 - \delta_3\right\}$.

Descriviamo la struttura della tesi:

Nel primo capitolo, pensato come capitolo introduttivo, troviamo importanti richiami di algebra, come le azioni di gruppo su un insieme, che servono per descrivere alcune proprietà dei gruppi di automorfismi.

Il secondo capitolo è dedicato ai rivestimenti di spazi topologici, in particolare allo studio dei gruppi di automorfismi di rivestimenti e dell'azione del gruppo fondamentale $\pi(X, x)$ sull'insieme $p^{-1}(x)$, dove $(\widetilde{X}, p)$ è un rivestimento di X e $x \in X$.
Importanti, negli ultimi due paragrafi del capitolo, sono la proposizione che mette in relazione i quozienti e i rivestimenti regolari, e il teorema d'esistenza di rivestimenti.

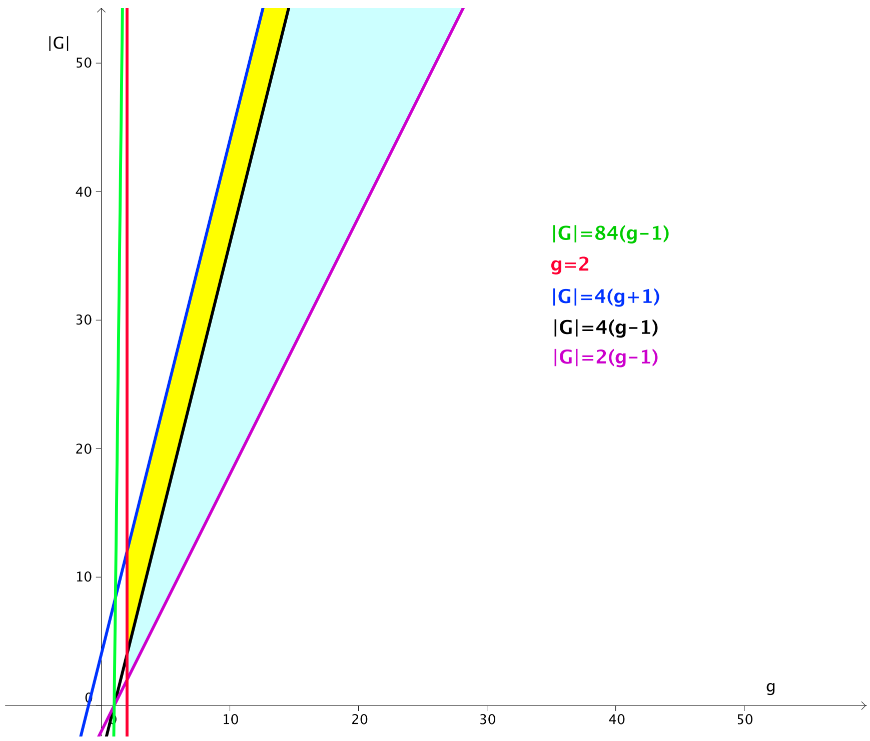

Figura 1: Grafico riassuntivo.

Il terzo capitolo è di grande importanza e ci porta, applicando la teoria dei capitoli precedenti alle superfici di Riemann ed introducendo il concetto di rivestimento ramificato, ad enunciare e dimostrare la formula di Riemann-Hurwitz.

Il quarto capitolo contiene il teorema di Hurwitz ed il teorema d'esistenza di Riemann tratto da [4] che ci consente di estendere un rivestimento non ramificato del complementare di un insieme finito di una superficie di Riemann ad un rivestimento ramificato dell'intera superficie di Riemann univocamente determinato a meno di isomorfismi.
Successivamente sviluppiamo un metodo elementare per costruire e classificare superfici di Riemann con opportuni gruppi di automorfismi abeliani, metodo riassunto nel teorema 4.3.4. Inoltre viene esposto il calcolo dell'abelianizzato del gruppo fondamentale del complementare di un insieme finito di una superficie di Riemann per mezzo del teorema di Seifert-Van Kampen, calcolo necessario per le applicazioni del teorema 4.3.4.

Il capitolo 5 è dedicato ai gruppi large e quasi large abeliani di automorfismi e contiene il calcolo di tutte le superfici di Riemann che ammettono un gruppo di automorfismi quasi large abeliano.

Capitolo 1

Azioni di gruppo su un insieme

1.1 Azioni di gruppi

Definizione 1. Sia G un gruppo finito. Sia X un insieme (si può trattare anche di uno spazio topologico).
Si definisce un'**azione sinistra** di G su X un'applicazione

$$G \times X \longrightarrow X$$

che indicheremo con

$$(g, P) \longmapsto g \cdot P$$

tale che

(i) $(g \cdot h) \cdot P = g \cdot (h \cdot P)$ per $g, h \in G$ e $P \in X$

(ii) $Id_G \cdot P = P$ per $P \in X$, dove $Id_G \in G$ è l'identità in G

L'insieme X lo chiamiamo **G-spazio sinistro**.

Definizione 2. Il **G-spazio destro** viene definito in modo analogo.
Si definisce un'**azione destra** di G su X un'applicazione

$$X \times G \longrightarrow X$$
$$(P, g) \longmapsto P \cdot g$$

tale che

(i) $P \cdot (g \cdot h) = (P \cdot g) \cdot h$ per $g, h \in G$ e $P \in X$

(ii) $P \cdot Id_G = P$ per $P \in X$, dove $Id_G \in G$ è l'identità in G.

Fissato $g \in G$, l'applicazione che manda P in $g \cdot P$ (risp. in $P \cdot g$) è biiettiva. La sua inversa è l'applicazione che manda P in $g^{-1} \cdot P$ (risp. in $P \cdot g^{-1}$).

Diamo le seguenti definizioni sia per un'azione sinistra, che per un'azione destra:

Definizione 3. L'**orbita** di un punto $P \in X$ è l'insieme

$$G \cdot P = \{g \cdot P \mid g \in G\}\,; \quad P \cdot G = \{P \cdot g \mid g \in G\}\,.$$

Lo **stabilizzatore** di un punto $P \in X$ è l'insieme

$$G_P = \{g \in G \mid g \cdot P = P\}\,; \quad G_P = \{g \in G \mid P \cdot g = P\}\,.$$

I punti appartenenti ad una stessa orbita hanno stabilizzatori coniugati, in quanto $G_{gP} = gG_{gP}g^{-1}$ (risp. $G_{gP} = g^{-1}G_{gP}g$). Inoltre, se G è un gruppo finito, l'ordine di un'orbita moltiplicato per l'ordine dello stabilizzatore coincide con l'ordine del gruppo G:

$$\mid G \cdot P \mid \; \mid G_P \mid = \mid G \mid; \quad \mid P \cdot G \mid \; \mid G_P \mid = \mid G \mid\,.$$

Definizione 4. Il **nucleo** dell'azione di G su X è l'intersezione di tutti gli stabilizzatori, cioè il sottogruppo

$$K = \{g \in G \mid g \cdot P = P, \forall P \in X\}\,; \quad K = \{g \in G \mid P \cdot g = P, \forall P \in X\}\,.$$

Definizione 5. Dato un gruppo G, un sottogruppo H di G si dice **normale** se

$$ghg^{-1} \in H, \qquad \forall g \in G, \forall h \in H$$

e si scrive $H \triangleleft G$.

Si verifica facilmente che il nucleo è un sottogruppo normale di G: basta far vedere che $g \cdot k \cdot g^{-1} \in K$ per ogni $g \in G$ e per ogni $k \in K$; sia $P \in X$

$$\begin{array}{rl} \text{azione sinistra:} & (gkg^{-1})P = g \cdot k(g^{-1}P) = gg^{-1}P = P \\ \text{azione destra:} & P(gkg^{-1}) = (Pg)k \cdot g^{-1} = Pgg^{-1} = P. \end{array}$$

Definizione 6. Un gruppo G agisce **senza punti fissi** sull'insieme X, se $\forall g, g' \in G$, $g \neq g'$ si ha che

$$g \cdot P \neq g' \cdot P \quad \forall P \in X; \qquad\qquad P \cdot g \neq P \cdot g' \quad \forall P \in X.$$

Definizione 7. Data un'azione su X: $G \times X \longrightarrow X$, definiamo l'azione del gruppo quoziente

$$\begin{array}{rcl} G/K \times X & \longrightarrow & X \\ ([g]\,, P) & \longmapsto & g \cdot P. \end{array}$$

Osserviamo che è ben definita per la definizione di K:

$$\begin{aligned}[g] = [g'] \quad &\Leftrightarrow \quad \exists k \in K \text{ con } g \cdot k = g' \\ &\Rightarrow \quad g' \cdot P = g \cdot k \cdot P = g \cdot P.\end{aligned}$$

Il gruppo quoziente G/K agisce su X con nucleo banale, lasciando invariate le orbite ottenute tramite l'azione di G su X. Possiamo sempre assumere che il nucleo è banale ed in questo caso l'azione di gruppo si dice **effettiva** o **fedele**.

Definizione 8. L'azione su uno spazio topologico X si dice **continua** se per ogni $g \in G$ la bigezione da $P \longmapsto g \cdot P$ (risp. $P \longmapsto P \cdot g$) è un'applicazione continua da X in se stesso.
Nel caso in cui X ha una struttura di varietà complessa, l'azione si dice **olomorfa** se per ogni $g \in G$ la bigezione da $P \longmapsto g \cdot P$ (risp. $P \longmapsto P \cdot g$) è olomorfa da X in se stesso.
Lo **spazio quoziente** X/G è l'insieme delle orbite.

L'applicazione $p\colon X \longrightarrow X/G$ manda un punto di X nella sua orbita. Diamo a X/G la topologia quoziente. L'applicazione quoziente p risulta essere continua. Se l'azione è continua (in particolare olomorfa) p è un'applicazione aperta.

Definizione 9. Sia G un gruppo. Due elementi a e b in G si dicono **coniugati** se esiste un elemento $g \in G$ con

$$gag^{-1} = b.$$

Si può verificare che la proprietà di essere coniugati è una relazione d'equivalenza.
La classe di equivalenza che contiene $a \in G$ è

$$\mathrm{Cl}(a) = \left\{gag^{-1} \middle| g \in G\right\}$$

e viene chiamata **classe di coniugio** di a. Notiamo che le classi di coniugio $\mathrm{Cl}(a)$ e $\mathrm{Cl}(b)$ sono uguali se e solo se a e b sono coniugati.

1.2 Altri richiami di algebra

Definizione 10. Il **normalizzatore** di un sottogruppo H di G è l'insieme

$$N[H] \quad := \quad \left\{g \in G \middle| g \cdot H \cdot g^{-1} = H\right\}.$$

Il normalizzatore di un sottogruppo H di G è il più grande sottogruppo di G che abbia H come sottogruppo normale. La verifica la rimandiamo a [8], *pagina 15.*

Lemma 1.2.1. *Se G è un gruppo abeliano allora ogni sottogruppo H di G è normale e quindi*
$$N[H] = G.$$

Dimostrazione. Ogni sottogruppo di un gruppo abeliano G è normale, siccome
$$ghg^{-1} = gg^{-1}h = h \in H, \quad \forall g \in G \text{ e } \forall h \in H.$$
Preso dunque $g \in G$, si ha $gHg^{-1} = H$, ovvero $g \in N[H]$.
Segue la tesi. □

Definizione 11. Un gruppo G agisce in modo **transitivo** su un insieme M se ha un'unica orbita, ovvero se per ogni $P, Q \in M$ esiste un $g \in G$, tale che
$$g \cdot P = Q; \qquad P \cdot g = Q.$$

Definizione 12. Si consideri un'azione sinistra (risp. un'azione destra) del gruppo G su un insieme M. $\varphi \colon M \longrightarrow M$ è un **automorfismo dell'insieme** M relativamente all'azione di G, se $\forall P \in M$ e $\forall g \in G$ vale
$$\varphi(g \cdot P) = g \cdot \varphi(P); \qquad \varphi(P \cdot g) = \varphi(P) \cdot g.$$

Più avanti nella tesi nel paragrafo 2.9 useremo *l'azione destra*. Per questo motivo la teoria che segue la applichiamo ad un *G-spazio destro*.

Sia $\varphi \colon M \longrightarrow M$ un automorfismo di un insieme su cui agisce un gruppo G, tale che $\varphi(P) = Q$. Deve valere
$$\varphi(P \cdot g) = \varphi(P) \cdot g.$$

Possiamo verificare che $\forall P \in M$, il punto P ed il punto $\varphi(P)$ hanno lo stesso stabilizzatore:
$$\begin{aligned} G_Q = G_{\varphi(P)} &= \{g \in G \big| \varphi(P) \cdot g = \varphi(P)\} \\ &= \{g \in \big| \varphi(P \cdot g) = \varphi(P)\} \\ &= \{g \in G \big| P \cdot g = P\} \\ &= G_P. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Viceversa sia G un gruppo transitivo che agisce su un insieme M, prendiamo $P, Q \in M$ con $G_P = G_Q$. Affermiamo che esiste un automorfismo φ, tale che $\varphi(P) = Q$. Definiamo φ nel seguente modo:
Sia $R \in M$, siccome G per ipotesi agisce in modo transitivo su M, esiste un $g \in G$, tale che
$$R = P \cdot g,$$
dunque
$$\varphi(R) = \varphi(P \cdot g) := \varphi(P) \cdot g = Q \cdot g.$$

Siccome per ipotesi $G_P = G_Q$ si ha

$$P \cdot \widetilde{g} \cdot g^{-1} = P \Leftrightarrow Q \cdot \widetilde{g} \cdot g^{-1} = Q,$$

allora

$$P \cdot \widetilde{g} = P \cdot g \Leftrightarrow Q \cdot \widetilde{g} = Q \cdot g;$$

per cui la definizione di φ è indipendente dalla scelta di $g \in G$.

Verifichiamo che φ è un omomorfismo biiettivo.
Dalla definizione di φ segue che per ogni $g, \widetilde{g}, h \in G$ con $g \cdot h = \widetilde{g}$ vale

$$\varphi(R \cdot h) = \varphi(P \cdot g \cdot h) = \varphi(P \cdot \widetilde{g}) = \varphi(P) \cdot \widetilde{g} = \varphi(P) \cdot g \cdot h = Q \cdot g \cdot h = \varphi(R) \cdot h.$$

Per dimostrare che è anche biiettiva, basta costruire φ^{-1} nello stesso modo.
Notiamo inoltre se $\varphi, \widetilde{\varphi}$ sono due automorfismi di M con $\varphi(P) = \widetilde{\varphi}(P)$, allora $\varphi = \widetilde{\varphi}$:

$$\varphi(R) = \varphi(P \cdot g) = \varphi(P) \cdot g = \widetilde{\varphi}(P) \cdot g = \widetilde{\varphi}(P \cdot g) = \widetilde{\varphi}(R) \quad \forall R \in M.$$

Il seguente lemma è una conseguenza delle ultime considerazioni fatte.

Lemma 1.2.2. *Sia G un gruppo che opera in modo transitivo sull'insieme M e sia A un gruppo di automorfismi di M, ovvero $A \subseteq Aut(M)$.*
A è uguale a tutto il gruppo di automorfismi di M, ovvero

$$A = Aut(M)$$

se e solo se per ogni coppia di elementi $P, Q \in M$ con $G_P = G_Q$, esiste un automorfismo $\varphi \in A$ tale che

$$\varphi(P) = Q.$$

Dimostrazione. Supponiamo $A = \mathrm{Aut}(M)$. Per ogni coppia di punti P e Q in M con $G_P = G_Q$, la costruzione dopo (1.1) induce un elemento $\varphi \in \mathrm{Aut}(M)$ con $\varphi(P) = Q$. Siccome $\mathrm{Aut}(M) = A$, segue $\varphi \in A$.

Viceversa, supponiamo che A non sia uguale ad $\mathrm{Aut}(M)$, e scegliamo $\tilde{\varphi} \in \mathrm{Aut}(M) \setminus A$. Fissiamo un punto $P \in M$ e scegliamo $Q = \tilde{\varphi}(P)$. Per (1.1) si ha $G_P = G_Q$. Se esistesse $\varphi \in A$ tale che $\varphi(P) = Q$, avremmo $\varphi(P) = \widetilde{\varphi}(P)$ e quindi $\varphi = \widetilde{\varphi}$ e si arriva ad una contraddizione.

□

Teorema 1.2.3. *Sia G un gruppo che agisce in modo transitivo su un insieme M, con $P \in M$.*
Allora il gruppo di tutti gli automorfismi di M è isomorfo a

$$\frac{N\left[G_P\right]}{G_P}.$$

Dimostrazione. Sia S l'insieme dei punti $P_i \in M$ che hanno tutti lo stesso stabilizzatore

$$G_{P_i} = G_P.$$

Per il lemma 1.2.2 il gruppo di automorfismi di M opera in modo transitivo su S.

Sia $P \in S$ e $g \in G$, allora

$$P \cdot g \in S \Leftrightarrow \left\{h \in G \middle| P \cdot g \cdot h = P \cdot g\right\} = G_P$$

$$\begin{aligned} P \cdot g \cdot h = P \cdot g \quad &\Leftrightarrow \quad P \cdot g \cdot h \cdot g^{-1} = P \\ &\Leftrightarrow \quad g \cdot h \cdot g^{-1} \in G_P \\ &\Leftrightarrow \quad h \in g^{-1} \cdot G_P \cdot g. \end{aligned}$$

Quindi

$$P \cdot g \in S \quad \Leftrightarrow \quad g \in N\left[G_P\right].$$

Allora $N\left[G_P\right]$ opera in modo transitivo su S, siccome G agisce in modo transitivo su M. Gli elementi che fissano ogni punto di S sono esattamente gli elementi di G_P. Allora lo spazio quoziente $\frac{N[G_P]}{G_P}$ opera in modo transitivo su S.

Costruiamo un isomorfismo tra il gruppo di automorfismi di M e $\frac{N[G_P]}{G_P}$. Sia φ un automorfismo di M. Da 1.1 sappiamo che $G_P = G_{\varphi(P)}$. Da questo segue che $\varphi(P) \in S$.
Siccome $\frac{N[G_P]}{G_P}$ agisce in modo transitivo su S esiste un elemento $\alpha \in \frac{N[G_P]}{G_P}$, tale che

$$P \cdot \alpha = \varphi(P).$$

Viceversa invece, per ogni $\alpha \in \frac{N[G_P]}{G_P}$ possiamo costruire, come nella dimostrazione del lemma precedente, un automorfismo, tale che

$$\varphi(P) = P \cdot \alpha.$$

Allora $\varphi \leftrightarrow \alpha$ è biiettiva. Rimane da verificare se si tratta di un omomorfismo. Siano dati due automorfismi φ, ψ e siano $\alpha, \beta \in \frac{N[G_P]}{G_P}$ con

$$\begin{aligned} \varphi(P) &= P \cdot \alpha \\ \psi(P) &= P \cdot \beta. \end{aligned}$$

Allora

$$(\varphi \circ \psi)(P) = (\varphi(\psi(P)) = \varphi(P \cdot \beta) = \varphi(P) \cdot \beta = (P \cdot \alpha) \cdot \beta = P \cdot (\alpha\beta).$$

Allora

$$\begin{aligned} S \quad &\longrightarrow \quad \frac{N\left[G_P\right]}{G_P} \\ \varphi \quad &\longmapsto \quad \alpha \end{aligned}$$

è un isomorfismo. □

Osservazione 1. Nel caso in cui G sia un gruppo abeliano allora $N[G_P] = G$. Inoltre vale $G \cdot P \cong \frac{G}{G_P}$.
Segue dunque

$$\mathrm{Aut}(M) \cong \frac{N[G_P]}{G_P} = \frac{G}{G_P} \cong G \cdot P.$$

Quando non ci sono punti fissi su M sotto l'azione di G allora G_P è il gruppo banale e $\mathrm{Aut}(M) \cong G$.

Capitolo 2

Rivestimenti e gruppi fondamentali

2.1 Cammini

Definizione 13. Sia X uno spazio topologico. Un **cammino** o **arco** in X è un'applicazione continua

$$f\colon I \longrightarrow X,$$

dove $I = [0,1]$. $f(0)$ è detto **punto iniziale** e $f(1)$ **punto finale** del cammino.
Se $f(0) = f(1)$ allora il cammino è detto **cammino chiuso** o **cappio** con **punto base** $f(0)$.
Dato un cammino $f\colon I \longrightarrow X$ il **cammino inverso** $\overline{f}\colon I \longrightarrow X$ è il cammino

$$\overline{f} = f(1-t), \qquad t \in I.$$

Due cammini $f\colon I \longrightarrow X$ e $g\colon I \longrightarrow X$ con lo stesso punto iniziale $f(0) = g(0)$ e lo stesso punto finale $f(1) = g(1)$ si dicono **omotopi** (si scrive $f \sim g$) se esiste una funzione continua

$$H\colon I \times I \longrightarrow X$$

tale che $\forall t \in I$ e $\forall s \in I$

$$\begin{aligned} H(t,0) &= f(t) \\ H(t,1) &= g(t) \\ H(0,s) &= f(0) = g(0) = x_0 \\ H(1,s) &= f(1) = g(1) = x_1. \end{aligned}$$

La trasformazione H tra i due cammini viene detta **omotopia**.
Si parla di **omotopia dei cammini aperti**, quando i cammini omotopi hanno il punto iniziale diverso dal punto finale, ovvero hanno due punti

diversi fissati $x_0 \neq x_1$.
Un caso particolare è l'**omotopia dei cammini chiusi**, ovvero dei cammini omotopi con punto base $x := x_0 = x_1$ fissato.

Definizione 14. Dati due cammini f, g tali che $f(1) = g(0)$, è possibile definire il **cammino prodotto**:

$$(f \cdot g)(t) = \begin{cases} f(2t) & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ g(2t-1) & \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

L'applicazione $f \cdot g$ è continua per il seguente

Lemma 2.1.1. ***(Lemma d'incollamento)***
Siano X, Y spazi topologici e A, B due sottoinsiemi chiusi di X tali che $X = A \cup B$ e siano $f|_A \colon A \longrightarrow Y$ e $f|_B \colon B \longrightarrow Y$ due applicazioni continue, tali che $f|_A(x) = f|_B(x)$ se $x \in A \cap B$. Allora l'applicazione

$$f(x) = \begin{cases} f|_A(x) & x \in A \\ f|_B(x) & x \in B. \end{cases}$$

è continua.

Dimostrazione. Ricordiamo che una funzione $f \colon X \longrightarrow Y$ è continua $\Longleftrightarrow$ $f^{-1}(U_c)$ è chiuso in X per ogni U_c chiuso in Y.
Si ha

$$f|_A^{-1}(U_c) = f^{-1}(U_c) \cap A$$

e

$$f|_B^{-1}(U_c) = f^{-1}(U_c) \cap B$$

$f|_A^{-1}(U_c) = f^{-1}(U_c) \cap A$ è chiuso in A siccome $f|_A$ è continua.
$f|_B^{-1}(U_c) = f^{-1}(U_c) \cap B$ è chiuso in B siccome $f|_B$ è continua.
Siccome A e B sono chiusi in X, $f|_A^{-1}(U_c)$ e $f|_B^{-1}(U_c)$ sono chiusi anche in X e siccome $X = A \cup B$, si ha che

$$f|_A^{-1}(U_c) \cup f|_B^{-1}(U_c) = (f^{-1}(U_c) \cap A) \cup (f^{-1}(U_c) \cap B) = f^{-1}(U_c) \cap (A \cup B) = f^{-1}(U_c)$$

è chiuso. Allora f è continua.

□

Rimane da dimostrare che la composizione di due cammini è ancora continua:

Teorema 2.1.2. *Il prodotto di due cammini (vedere definizione 14) è ancora un cammino.*

Dimostrazione. Siano $f\colon [0,1] \longrightarrow X$ e $g\colon [0,1] \longrightarrow X$ due cammini. Il cammino prodotto sappiamo essere

$$(f \cdot g)(t) = \begin{cases} f(2t) & t \in A = \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ g(2t-1) & t \in B = \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

In $t = \frac{1}{2}$ si ha $f(2t) = g(2t-1)$, in quanto $f(1) = g(0)$. Applicando il lemma precedente 2.1.1 al cammino prodotto $(f \cdot g)\colon [0,1] \longrightarrow X$ si ha la tesi. □

2.2 Definizione di rivestimento

Definizione 15. Uno spazio topologico X è **connesso per archi** se per ogni coppia di punti $x_0, x_1 \in X$ esiste un cammino che ha x_0 come punto iniziale e x_1 come punto finale.

Definizione 16. Uno spazio topologico X si dice **localmente connesso per archi** se per ogni $x \in X$ e per ogni intorno aperto V di x, con $x \in V \subseteq X$, esiste un sottoinsieme U di X, aperto e connesso per archi, tale che

$$x \in U \subseteq V.$$

Da ora in poi consideriamo spazi topologici connessi per archi e localmente connessi per archi.

Definizione 17. Sia X uno spazio topologico. Un **rivestimento** di X è una coppia costituita da uno spazio $\widetilde{X}$ ed una mappa continua $p\colon \widetilde{X} \to X$, tale che ogni punto $x \in X$ ha un intorno aperto U con $p^{-1}(U)$ unione disgiunta di aperti connessi per archi di $\widetilde{X}$, ognuno dei quali è omeomorfo a U tramite p.
Un intorno U che soddisfa queste proprietà viene detto aperto **uniformemente rivestito** oppure **aperto elementare**.

2.3 Sollevamento dei cammini ad un rivestimento

Lemma 2.3.1. *Sia $(\widetilde{X}, p)$ un rivestimento di X, $\widetilde{x}_0 \in \widetilde{X}$ e $x_0 = p(\widetilde{x}_0)$. Allora per ogni cammino $f\colon I \to X$ con punto iniziale x_0, esiste un unico cammino $g\colon I \to \widetilde{X}$ con punto iniziale $\widetilde{x}_0$, tale che $pg = f$.*

g viene detto **cammino sollevato** di f. Presi due cammini $g_0, g_1\colon I \to \widetilde{X}$ osserviamo che se $g_0 \sim g_1$ allora $pg_0 \sim pg_1$. Vale anche il viceversa:

Lemma 2.3.2. *Sia $(\widetilde{X}, p)$ un rivestimento di X e siano $g_0, g_1\colon I \to \widetilde{X}$ cammini in $\widetilde{X}$ con lo stesso punto iniziale $g_0(0) = g_1(0)$.
Se $pg_0 \sim pg_1$, allora $g_0 \sim g_1$. In particolare g_0 e g_1 hanno lo stesso punto finale $g_0(1) = g_1(1)$.*

Per una dimostrazione dei due lemmi rimandiamo il lettore a [1], *pagina 123 Lemma 3.1* e *pagina 124 Lemma 3.3.*

2.4 La fibra e il grado di p

Definizione 18. Sia $p\colon \widetilde{X} \longrightarrow X$ una mappa continua tra due spazi topologici. L'insieme $p^{-1}(x)$, per $x \in X$, viene detto **fibra** di p su x. Se $\widetilde{x} \in p^{-1}(x)$, allora si dice che $\widetilde{x}$ *sta sopra* x.
Siano $p_1\colon \widetilde{X}_1 \longrightarrow X$ e $p_2\colon \widetilde{X}_2 \longrightarrow X$ due mappe continue tra spazi topologici, allora $\varphi\colon \widetilde{X}_1 \longrightarrow \widetilde{X}_2$ **preserva le fibre** se $p_1 = p_2 \circ \varphi$:

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X}_1 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p_1"'] & & \widetilde{X}_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Questo vuol dire che ogni punto $\widetilde{x} \in \widetilde{X}_1$, che sta sopra $x \in X$, viene mappato in un altro punto che sta ancora sopra x.

Lemma 2.4.1. *Se* $(\widetilde{X}, p)$ *è un rivestimento di* X*, allora* $\forall x \in X$ *gli insiemi* $p^{-1}(x)$ *hanno tutti lo stesso numero cardinale.*

Dimostrazione. Siano x_0 e x_1 due punti su X. Scegliamo un cammino f in X con punto iniziale x_0 e punto finale x_1. Usiamo f e definiamo una mappa $p^{-1}(x_0) \longrightarrow p^{-1}(x_1)$ nel seguente modo:
dato un punto $y_0 \in p^{-1}(x_0)$, solleviamo il cammino f ad un cammino g in $\widetilde{X}$ con punto iniziale y_0 tale che $pg = f$. Sia y_1 il punto finale di g. Allora $y_0 \longrightarrow y_1$ è la mappa richiesta.
Usando il cammino inverso $\overline{f}(t) = f(1-t)$ possiamo definire una mappa $p^{-1}(x_1) \longrightarrow p^{-1}(x_0)$. Per il lemma 2.3.2 si tratta proprio di quella inversa.
Quindi entrambe sono iniettive e suriettive. $\square$

Definizione 19. Sia $(\widetilde{X}, p)$ un rivestimento di X. Il numero cardinale dell'insieme $p^{-1}(x)$, con $x \in X$, viene chiamato **numero di fogli del rivestimento** $(\widetilde{X}, p)$ oppure **grado** del rivestimento. Il numero di fogli può essere finito o infinito.

Esempio 2.1. (di rivestimento con n fogli)
La mappa

$$\begin{aligned} p_n\colon S^1 &\longrightarrow S^1 \\ z &\longmapsto z^n \end{aligned}$$

è un rivestimento a n fogli. Mappa il cerchio n volte su se stesso, dove n è un intero positivo o negativo diverso da zero.

2.5 Morfismi ed automorfismi di rivestimenti

Definizione 20. Siano $(\widetilde{X}_1, p_1)$ e $(\widetilde{X}_2, p_2)$ rivestimenti di uno spazio X. Un **morfismo** da $(\widetilde{X}_1, p_1)$ in $(\widetilde{X}_2, p_2)$ è una mappa continua

$$\varphi \colon \widetilde{X}_1 \to \widetilde{X}_2$$

che preserva le fibre, cioè tale che $\forall \widetilde{x} \in \widetilde{X}_1$ vale

$$p_1(\widetilde{x}) = p_2\varphi(\widetilde{x}).$$

Notiamo che una composizione di morfismi è ancora un morfismo e se $(\widetilde{X}, p)$ è un rivestimento di X, allora l'identità $\widetilde{X} \to \widetilde{X}$ è un morfismo.

Lemma 2.5.1. *Siano φ_0 e φ_1 morfismi da $(\widetilde{X}_1, p_1)$ in $(\widetilde{X}_2, p_2)$. Se esiste un punto $x \in \widetilde{X}_1$ tale che $\varphi_0(x) = \varphi_1(x)$, allora*

$$\varphi_0 = \varphi_1.$$

Per la dimostrazione del lemma rimandiamo il lettore a [1], *pagina 130 Lemma 6.1.*

Definizione 21. Un morfismo φ da $(\widetilde{X}_1, p_1)$ in $(\widetilde{X}_2, p_2)$ è un **isomorfismo** se esiste un morfismo

$$\psi \colon (\widetilde{X}_2, p_2) \longrightarrow (\widetilde{X}_1, p_1)$$

tale che entrambe le composizioni $\varphi\psi$ e $\psi\varphi$ formano l'identità.
Due rivestimenti **sono isomorfi** se esiste un isomorfismo da un rivestimento nell'altro.

Definizione 22. Un **automorfismo** è un isomorfismo di un rivestimento $(\widetilde{X}, p)$ in se stesso; si può trattare o meno dell'identità.

L'insieme di tutti gli automorfismi di rivestimenti $(\widetilde{X}, p)$ di X è un gruppo rispetto alla composizione di mappe. Denotiamo questo gruppo con $A(\widetilde{X}, p)$.

Prima di studiare alcune proprietà di morfismi ed automorfismi di rivestimenti, dobbiamo capire come agiscono i gruppi sugli spazi topologici e fare alcuni richiami sui gruppi fondamentali.

2.6 Il gruppo fondamentale

Teorema 2.6.1. *L'omotopia di cammini è una relazione d'equivalenza.*

Dimostrazione. Siano f, g, h cammini. Dimostriamo che l'omotopia di cammini soddisfa le seguenti tre proprietà:

- Proprietà riflessiva:

$$\begin{array}{rcl} f \sim f & \Longleftrightarrow & \exists H\colon I \times I \longrightarrow X \\ & \text{con} & H(t,0) = f(t) \quad H(t,1) = f(t) \\ & \text{e} & H(0,s) = f(0) \quad H(1,s) = f(1). \end{array}$$

  Basta prendere $H(t,s) = f(t)$.

- Simmetria:
  Sia $f \sim g$, sia H l'omotopia corrispondente e definiamo

$$H'(t,s) = H(t, 1-s)\colon I \times I \longrightarrow X.$$

$$\begin{array}{rcl} H'(t,0) & = & H(t,1) = g(t) \\ H'(t,1) & = & H(t,0) = f(t) \\ H'(0,s) & = & f(0) = g(0) \\ H'(1,s) & = & f(1) = g(1). \end{array}$$

  Allora $g \sim f$ e H' è l'omotopia corrispondente.

- Proprietà transitiva:
  Se $f \sim g$ e $g \sim h$ allora si hanno due omotopie H e K con

$$\begin{array}{ll} H(t,0) = f(t) & H(t,1) = g(t) \\ K(t,0) = g(t) & K(t,1) = h(t) \end{array}$$

  e

$$\begin{array}{ll} H(0,s) = f(0) = g(0) & H(1,s) = f(1) = g(1) \\ K(0,s) = g(0) = h(0) & K(1,s) = g(1) = h(1). \end{array}$$

  Definiamo

$$L(t,s) := \begin{cases} H(t,2s) & \text{per} \quad 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ K(t,2s-1) & \text{per} \quad \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

  Per il lemma d'incollamento 2.1.1 L è continua ed ha le proprietà richieste per essere un'omotopia tra f e h, per cui $f \sim h$.

$\square$

Definizione 23. Siccome l'omotopia di due cammini è una relazione d'equivalenza, questo insieme viene suddiviso in più classi d'equivalenza. $[f]$ è la classe d'equivalenza di un cammino f e viene detta **classe d'omotopia** di f. Indichiamo la classe con $\alpha = [f]$ e diciamo che f rappresenta α.

Dati due cammini f e g, che rappresentano le classi d'omotopia α e β rispettivamente con $f(1) = g(0)$, definiamo la **classe d'equivalenza prodotto**

$$\alpha \cdot \beta = [f] \cdot [g] := [f \cdot g] .$$

L'insieme delle classi d'omotopia dei cammini chiusi forma un gruppo rispetto al prodotto. Si tratta del **gruppo fondamentale** di X in x_0 e lo indichiamo con $\pi(X, x_0)$.

Teorema 2.6.2. *Se X è connesso per archi si ha per qualsiasi coppia di punti in X*

$$\pi(X, x_0) \cong \pi(X, x_1).$$

Osserviamo che in questo caso si può denotare il gruppo fondamentale con $\pi(X)$.

Dimostrazione. Siano x_0, x_1 due punti in X e sia γ una classe di cammini con punto iniziale x_0 e punto finale x_1.
Usando γ definiamo

$$\begin{aligned} u\colon \quad \pi(X, x_0) &\longrightarrow \pi(X, x_1) \\ \alpha \quad &\longmapsto \gamma^{-1}\alpha\gamma. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Osserviamo che la mappa definita è un omomorfismo da $\pi(X, x_0)$ in $\pi(X, x_1)$.
Usando il cammino inverso γ^{-1} al posto di γ, possiamo definire un omomorfismo

$$\begin{aligned} v\colon \quad \pi(X, x_1) &\longrightarrow \pi(X, x_0) \\ \beta \quad &\longmapsto \gamma\beta\gamma^{-1}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Verifichiamo che uv e vu sono le mappe identità di $\pi(X, x_0)$ e $\pi(X, x_1)$ rispettivamente:

$$\begin{aligned} u(v(\beta)) = u(\gamma\beta\gamma^{-1}) = \gamma^{-1}\gamma\beta\gamma^{-1}\gamma = \beta \\ v(u(\alpha)) = v(\gamma^{-1}\alpha\gamma) = \gamma\gamma^{-1}\alpha\gamma\gamma^{-1} = \alpha. \end{aligned}$$

Dunque u e v sono isomorfismi e $u = v^{-1}$. □

2.7 Il gruppo fondamentale di un rivestimento

Definizione 24. Uno spazio topologico è semplicemente connesso se ha gruppo fondamentale $\pi(X)$ banale.

Teorema 2.7.1. *Sia* $(\widetilde{X}, p)$ *un rivestimento di* X*,* $\widetilde{x}_0 \in \widetilde{X}$ *e* $x_0 = p(\widetilde{x}_0)$*. Allora l'omomorfismo indotto* $p_*\colon \pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to \pi(X, x_0)$ *è un monomorfismo*[1]*.*

È un caso particolare del lemma 2.3.2, assumendo g_0 e g_1 cammini chiusi.

Il teorema porta alla seguente domanda: siano $\widetilde{x}_0$ e $\widetilde{x}_1$ punti di $\widetilde{X}$, tali che $p(\widetilde{x}_0) = p(\widetilde{x}_1) = x_0$. In che modo si possono confrontare le immagini dei seguenti omomorfismi?

$$p_*\colon \pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to \pi(X, x_0)$$
$$p_*\colon \pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_1) \to \pi(X, x_0)\,.$$

La risposta ci dà il seguente teorema:

Teorema 2.7.2. *Sia* $(\widetilde{X}, p)$ *un rivestimento di* X *e* $x_0 \in X$*. Allora i sottogruppi* $p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_i)$*, per* $\widetilde{x}_i \in p^{-1}(x_0)$*, formano una classe di coniugio di sottogruppi di* $\pi(X, x_0)$*.*

Dimostrazione. Basta scegliere una classe di cammini γ in $\widetilde{X}$ da $\widetilde{x}_0$ in $\widetilde{x}_1$. Questa scelta definisce per il teorema 2.6.2 e la sua dimostrazione, un isomorfismo

$$u\colon \pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to \pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_1),$$

con

$$u(\alpha) = \gamma^{-1}\alpha\gamma.$$

Otteniamo il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) & \xrightarrow{p_*} & \pi(X, x_0) \\ {\scriptstyle u}\big\downarrow & & {\scriptstyle v}\big\downarrow \\ \pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_1) & \xrightarrow{p_*} & \pi(X, x_0) \end{array}$$

con $v(\beta) = (p_*\gamma)^{-1}\beta(p_*\gamma)$. Ma $p_*(\gamma)$ è un cappio di punto base x_0, ovvero è un elemento di $\pi(X, x_0)$, perché $p(\widetilde{x}_0) = p(\widetilde{x}_1)$. Notiamo dunque che le immagini di $\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ e di $\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_1)$ tramite p_* sono sottogruppi coniugati di $\pi(X, x_0)$.

Mostriamo infine che ogni sottogruppo nella classe di coniugio del sottogruppo $p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ può essere ottenuto come l'immagine $p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_1)$ per qualche punto $\widetilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$.
Ogni sottogruppo nella classe di coniugio è della forma

$$\alpha^{-1}[p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)]\alpha$$

[1] Un monomorfismo è un omomorfismo iniettivo.

per qualche elemento $\alpha \in \pi\,(X, x_0)$. Scelto poi un cammino chiuso $f\colon I \to X$ che rappresenta α, ci basta applicare il lemma 2.3.1 per ottenere un cammino $g\colon I \to \widetilde{X}$ che ricopre α con punto iniziale x_0. Sia $\widetilde{x}_1$ il punto finale del cammino sollevato g. Osserviamo allora

$$p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_1) = \alpha^{-1}[p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)]\alpha.$$

□

Oltre ai cammini si possono sollevare mappe arbitrarie di rivestimenti. Facciamo un esempio.

Teorema 2.7.3. *Sia $(\widetilde{X}, p)$ un rivestimento di X. Supponiamo che Y sia uno spazio connesso e localmente connesso per archi con $y_0 \in Y$, $\widetilde{x}_0 \in \widetilde{X}$ e $x_0 = p(\widetilde{x}_0)$. Data una mappa*

$$\varphi\colon Y \to X \ \textit{con}\ \varphi(y_0) := x_0$$

esiste un sollevamento

$$\widetilde{\varphi}\colon Y \to \widetilde{X} \ \textit{con}\ \widetilde{\varphi}(y_0) := \widetilde{x}_0$$

se e solo se

$$\varphi_*\pi(Y, y_0) \subset p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$$

e tale sollevamento è unico.

Per la dimostrazione, rimandiamo il lettore a [1], a *pagina 128, Teorema 5.1.*

2.8 Proprietà dei gruppi di automorfismi

Definizione 25. Un gruppo G agisce in modo **propriamente discontinuo**[2] su uno spazio topologico X se $\forall P \in X$ esiste un intorno U, tale che

$$U \cap g \cdot U = \emptyset \qquad \forall g \in G, g \neq Id$$

Lemma 2.8.1. *Se il gruppo G agisce in modo propriamente discontinuo su X, allora agisce senza punti fissi.*

Dimostrazione. Sia $P \in X$, allora esiste un intorno U di P, tale che

$$U \cap g \cdot U = \emptyset \qquad \forall g \in G, g \neq Id$$

e quindi

$$P \neq g \cdot P.$$

□

[2]Precisiamo che in letteratura ci sono diverse definizioni di *gruppo propriamente discontinuo*. Noi usiamo quella di [1].

Elenchiamo ora alcune conseguenze del Teorema 2.7.3.

Corollario 2.8.2. *Sia* $(\widetilde{X}, p)$ *un rivestimento di* X*. Il gruppo* $A(\widetilde{X}, p)$ *opera senza punti fissi su* $\widetilde{X}$*; cioè se* $\widetilde{\varphi} \in A(\widetilde{X}, p)$ *e* $\widetilde{\varphi} \neq 1$*, allora* $\widetilde{\varphi}$ *non ha punti fissi.*

Dimostrazione. Sia $\widetilde{\varphi} \neq Id$. Supponiamo per assurdo che $\widetilde{\varphi}$ ha un punto fisso P, cioè $\widetilde{\varphi}(P) = P$.
Applichiamo il teorema 2.7.3 a $P \in \widetilde{X}$. Segue che $\widetilde{\varphi}$ è l'unico sollevamento di p, con $\widetilde{\varphi}(P) = P$ e dunque $\widetilde{\varphi} = Id$. □

Corollario 2.8.3. *Siano* $(\widetilde{X}_1, p_1)$ *e* $(\widetilde{X}_2, p_2)$ *due rivestimenti di* X *e* $\widetilde{x}_i \in \widetilde{X}_i$ *(con* $i = 1, 2$*) punti tale che* $p_1(\widetilde{x}_1) = p_2(\widetilde{x}_2)$*. Allora esiste un morfismo* φ *da* $(\widetilde{X}_1, p_1)$ *e* $(\widetilde{X}_2, p_2)$ *tale che* $\varphi(\widetilde{x}_1) = \widetilde{x}_2$ *se e solo se* $p_{1*}\pi(\widetilde{X}_1, \widetilde{x}_1) \subset p_{2*}\pi(\widetilde{X}_2, \widetilde{x}_2)$*.*

Questo corollario è un caso particolare del teorema 2.7.3: $Y = \widetilde{X}_1$, $\varphi = p_1$ e in questo caso (Y, φ) è un rivestimento di X.

Corollario 2.8.4. *Siano* $(\widetilde{X}_1, p_1)$ *e* $(\widetilde{X}_2, p_2)$ *due rivestimenti di* X *e* $\widetilde{x}_i \in \widetilde{X}_i$ *(con* $i = 1, 2$*) punti tale che* $p_1(\widetilde{x}_1) = p_2(\widetilde{x}_2)$*. Allora esiste un isomorfismo* φ *da* $(\widetilde{X}_1, p_1)$ *e* $(\widetilde{X}_2, p_2)$ *tale che* $\varphi(\widetilde{x}_1) = \widetilde{x}_2$ *se e solo se* $p_{1*}\pi(\widetilde{X}_1, \widetilde{x}_1) = p_{2*}\pi(\widetilde{X}_2, \widetilde{x}_2)$*.*

È una conseguenza diretta del corollario 2.8.3 e dalla definizione di isomorfismo.

Corollario 2.8.5. *Sia* $(\widetilde{X}, p)$ *un rivestimento di* X *e* $\widetilde{x}_1$*,* $\widetilde{x}_2 \in p^{-1}(x_0)$ *con* $x_0 \in X$*.*
Esiste un automorfismo $\varphi \in A(\widetilde{X}, p)$ *tale che* $\varphi(\widetilde{x}_1) = \widetilde{x}_2$ *se e solo se*

$$p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_1) = p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_2).$$

Si tratta di un caso particolare del corollario 2.8.4.

Teorema 2.8.6. *Due rivestimenti* $(\widetilde{X}_1, p_1)$ *e* $(\widetilde{X}_2, p_2)$ *di* X *sono isomorfi se e solo se, comunque scelti punti* $\widetilde{x}_1 \in \widetilde{X}_1$ *e* $\widetilde{x}_2 \in \widetilde{X}_2$ *tali che* $p_1(\widetilde{x}_1) = p_2(\widetilde{x}_2) = x_0$*, i sottogruppi* $p_{1*}\pi(\widetilde{X}_1, \widetilde{x}_1)$ *e* $p_{2*}\pi(\widetilde{X}_2, \widetilde{x}_2)$ *appartengono alla stessa classe di coniugio in* $\pi(X, x_0)$*.*

Dimostrazione. Segue direttamente dal corollario 2.8.4 e dal teorema 2.7.2. □

Quest'ultimo teorema mostra che la classe di coniugio dei sottogruppi menzionati nel teorema 2.7.2 determina il rivestimento a meno di isomorfismi.

Lemma 2.8.7. *Siano* $(\widetilde{X}_1, p_1)$ *e* $(\widetilde{X}_2, p_2)$ *rivestimenti di* X *e sia* φ *un morfismo da un rivestimento nell'altro. Allora* $(\widetilde{X}_1, \varphi)$ *è un rivestimento di* $\widetilde{X}_2$*.*

Per una dimostrazione completa, rimandiamo il lettore a [1], a *pagina 131, Lemma 6.7.*

Sia $(\widetilde{X}, p)$ un rivestimento di X tale che $\widetilde{X}$ è semplicemente connesso. Se $(\widetilde{X}', p')$ è un altro rivestimento di X allora per il lemma 2.8.3 esiste un morfismo φ da $(\widetilde{X}, p)$ in $(\widetilde{X}', p')$ e per il lemma 2.8.7 $(\widetilde{X}, \varphi)$ è un rivestimento di $\widetilde{X}'$. Questo vuol dire che $\widetilde{X}$ può essere considerato come rivestimento di ogni rivestimento di X.

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & \widetilde{X}' \arrow[dl, "p'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Definizione 26. Un rivestimento semplicemente connesso $(\widetilde{X}, p)$, viene detto **rivestimento universale**.

Dal teorema 2.8.6 due rivestimenti universali di uno spazio X sono isomorfi.

2.9 L'azione del gruppo $\pi(X, x)$ sull'insieme $p^{-1}(x)$

Definiamo innanzitutto l'azione del gruppo $\pi(X, x)$ sull'insieme $p^{-1}(x)$, $\forall x \in X$. In particolare definiamo l'**azione destra** del gruppo $\pi(X, x)$ sull'insieme $p^{-1}(x)$.

Definizione 27. Sia $(\widetilde{X}, p)$ un rivestimento di X e $x \in X$. Per ogni punto $\widetilde{x} \in p^{-1}(x)$ e $\alpha \in \pi(X, x)$ definiamo $\widetilde{x} \cdot \alpha \in p^{-1}(x)$ come segue.
Per i lemma 2.3.1 e 2.3.2 esiste un'unica classe di cammini $\widetilde{\alpha}$ in $\widetilde{X}$ tale che $p_*(\widetilde{\alpha}) = \alpha$ e $\widetilde{x}$ è il punto iniziale di $\widetilde{\alpha}$. Definiamo $\widetilde{x} \cdot \alpha$ il **punto finale** della classe di cammini $\widetilde{\alpha}$.

Valgono seguenti proprietà che rendono $\pi(X, x)$ un gruppo di *operatori destri* sull'insieme $p^{-1}(x)$:

$$\begin{aligned} (\widetilde{x} \cdot \alpha) \cdot \beta &= \widetilde{x} \cdot (\alpha \cdot \beta) \\ \widetilde{x} \cdot e &= \widetilde{x}. \end{aligned}$$

$p^{-1}(x)$ è dunque un $\pi(X, x)$-insieme destro.

Lemma 2.9.1. *Il gruppo $\pi(X,x)$ opera in modo transitivo su $p^{-1}(x)$, ovvero esiste un'unica orbita.*

Dimostrazione. Dobbiamo mostrare che $\forall \widetilde{x}_0, \widetilde{x}_1 \in p^{-1}(x)$ esiste $\alpha \in \pi(X,x)$, tale che $\widetilde{x}_0 \cdot \alpha = \widetilde{x}_1$. Siccome $\widetilde{X}$ è connesso per archi, allora esiste una classe di cammini $\widetilde{\alpha}$ in $\widetilde{X}$ con punto iniziale $\widetilde{x}_0$ e punto finale $\widetilde{x}_1$. Sia poi $p_*(\widetilde{\alpha}) = \alpha$. α è una classe di equivalenza di cammini chiusi e segue dalla definizione precedente

$$\widetilde{x}_0 \cdot \alpha = \widetilde{x}_1.$$

Quindi $\pi(X,x)$ agisce in modo transitivo su $p^{-1}(x)$. □

Lemma 2.9.2. *Per $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ lo stabilizzatore di $\widetilde{x}$ è*

$$Stab(\widetilde{x}) = p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x})$$

e vale

$$p^{-1}(x) \cong \frac{\pi(X,x)}{p_*\pi(\widetilde{X},\widetilde{x})}.$$

Dimostrazione. Dalla definizione dell'azione $\pi(X,x)$ su $\widetilde{X}$ segue

$$Stab(\widetilde{x}) = \left\{\alpha \in \pi(X,x) \middle| \widetilde{x} \cdot \alpha = \widetilde{x}\right\} = p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}).$$

Preso $G = \pi(X,x)$ e sia $p^{-1}(x)$ l'orbita del punto $\widetilde{x}$ sotto l'azione di G, allora segue

$$\frac{\pi(X,x)}{p_*\pi(\widetilde{X},\widetilde{x})} = \frac{G}{Stab(\widetilde{x})} = \widetilde{x} \cdot G = |p^{-1}(x)|.$$

□

2.9.1 Connessione tra il gruppo di automorfismi di rivestimenti e l'azione $\pi(X,x)$ su $p^{-1}(x)$

Proposizione 2.9.3. *Per ogni automorfismo $\varphi \in A(\widetilde{X},p)$, $\forall \widetilde{x} \in p^{-1}(x)$, $\forall \alpha \in \pi(X,x)$ vale*

$$\varphi(\widetilde{x} \cdot \alpha) = (\varphi\widetilde{x}) \cdot \alpha;$$

ovvero ogni elemento $\varphi \in A(\widetilde{X},p)$ induce un automorfismo dell'insieme $p^{-1}(x)$, sotto l'azione di $\pi(X,x)$.

Dimostrazione. Sia α un cammino su X. Possiamo sollevarlo ad un cammino $\widetilde{\alpha}$ in $\widetilde{X}$ con punto iniziale $\widetilde{x}_0$, tale che $p_*(\widetilde{\alpha}) = \alpha$.
Consideriamo la classe d'equivalenza $\varphi_*(\widetilde{\alpha})$ di cammini su $\widetilde{X}$ con punto iniziale $\varphi(\widetilde{x})$ e punto finale $\varphi(\widetilde{x} \cdot \alpha)$. Siccome φ è un automorfismo

$$p_*\varphi_*(\widetilde{\alpha}) = (p \cdot \varphi)_*(\widetilde{\alpha}) = p_*(\widetilde{\alpha}) = \alpha,$$

cioè $\varphi_*(\widetilde{\alpha})$ è un sollevamento del cammino α. Quindi $\varphi(\widetilde{x}) \cdot \alpha$ è il punto finale di $\varphi_*(\widetilde{\alpha})$, un sollevamento di α con punto iniziale $\varphi(\widetilde{x})$, per cui

$$(\varphi\widetilde{x}) \cdot \alpha = \varphi(\widetilde{x} \cdot \alpha).$$

□

Possiamo dunque determinare la struttura del gruppo di automorfismi $A(\widetilde{X}, x)$.

Teorema 2.9.4. *Sia $(\widetilde{X}, p)$ un rivestimento di X. Allora il gruppo di automorfismi $A(\widetilde{X}, p)$ è isomorfo al gruppo d'automorfismi dell'insieme $p^{-1}(x)$, con $x \in X$, visto come $\pi(X, x)$-insieme destro.*

La dimostrazione la rimandiamo a [1], *pagina 134, Teorema 7.2.*

Teorema 2.9.5. *$\forall x \in X$ e $\forall \widetilde{x} \in p^{-1}(x)$ vale:*

$$A(\widetilde{X}, p) \cong \frac{N[p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x})]}{p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x})}.$$

Dimostrazione. Per il teorema 2.9.1 il gruppo $\pi(X, x)$ agisce in modo transitivo su $\pi(X, x)$-insieme destro $p^{-1}(x)$ e per il teorema 2.9.4 $A(\widetilde{X}, p) \cong H$, dove H è il gruppo di automorfismi sul $\pi(X, x)$-insieme destro. Allora si ha per il teorema 1.2.3 ed il lemma 2.9.2

$$A(\widetilde{X}, p) \cong H \cong \frac{N\left[G_{\widetilde{x}}\right]}{G_{\widetilde{x}}} \cong \frac{N\left[p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x})\right]}{p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x})}.$$

□

Definizione 28. La classe di rivestimenti per i quali il sottogruppo $p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x})$ di $\pi(X, x)$ è normale, viene detta **regolare**.

Corollario 2.9.6. *Se $(\widetilde{X}, p)$ è un rivestimento regolare di X, allora*

$$A(\widetilde{X}, p) \cong \frac{\pi(X, x)}{p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x})}$$

per ogni $x \in X$ e per ogni $\widetilde{x} \in p^{-1}(x)$.

Dimostrazione. Segue dal corollario precedente, perché $N[p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x})] = \pi(X, x)$.

□

Corollario 2.9.7. *Sia $(\widetilde{X}, p)$ il rivestimento universale di X, allora $A(\widetilde{X}, p)$ è isomorfo al gruppo $\pi(X)$. Inoltre l'ordine del gruppo $\pi(X)$ è uguale al numero di fogli del rivestimento $(\widetilde{X}, p)$, cioè*

$$|A(\widetilde{X}, p)| = |\pi(X)| = |p^{-1}(x)|.$$

2.10 Rivestimenti regolari e spazi quoziente

Sia $(\widetilde{X}, p)$ un rivestimento di X. p è aperta, quindi la topologia di X è la topologia quoziente indotta da p. Possiamo ottenere X da $\widetilde{X}$ tramite il seguente processo di identificazione: tutti i punti dell'insieme $p^{-1}(x)$ vengono identificati con l'unico punto x, $\forall x \in X$.
Il gruppo di automorfismi $A(\widetilde{X}, p)$ permuta i punti dell'insieme $p^{-1}(x)$ fra di loro. Non è vero in generale che lo spazio quoziente $\widetilde{X}/A(\widetilde{X}, p)$ è omeomorfo a X, perché possono esistere punti diversi $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2 \in p^{-1}(x)$ per cui non esiste alcun automorfismo $\varphi \in A(\widetilde{X}, p)$, tale che $\varphi(\widetilde{x}_1) = \widetilde{x}_2$. In altre parole il gruppo di automorfismi $A(\widetilde{X}, p)$ non è sempre transitivo su $p^{-1}(x)$.

Lemma 2.10.1. *Sia $(\widetilde{X}, p)$ un rivestimento di X. Il gruppo di automorfismi $A(\widetilde{X}, p)$ è transitivo su $p^{-1}(x)$, con $x \in X$, se e solo se $(\widetilde{X}, p)$ è un rivestimento regolare di X.*

È conseguenza immediata del teorema 2.7.2 e del corollario 2.8.5.

Proposizione 2.10.2. *Sia $\widetilde{X}$ uno spazio topologico connesso e localmente connesso per archi. Sia poi G un gruppo di automorfismi di $\widetilde{X}$ propriamente discontinuo. Denotiamo con*

$$p \colon \widetilde{X} \to \widetilde{X}/G$$

la proiezione naturale da $\widetilde{X}$ nel suo spazio quoziente. Allora $(\widetilde{X}, p)$ è un rivestimento regolare di $\widetilde{X}/G$ e $G = A(\widetilde{X}, p)$.

Dimostrazione. Sia $Q \in \widetilde{X}/G$. Dobbiamo mostrare che Q ha un intorno elementare.
Scegliamo $P \in \widetilde{X}$, tale che

$$p(P) = Q.$$

Per ipotesi esiste un intorno N di P, tale che

$$N \cap g \cdot N = \emptyset \qquad \forall g \in G, g \neq Id.$$

Siccome $\widetilde{X}$ è localmente connesso per archi, esiste un aperto connesso V di P, tale che $V \subseteq N$.

Sia $U := p(V)$. Siccome p è una mappa aperta, U è un insieme aperto. Inoltre U è connesso per archi. Siccome G opera in modo propriamente discontinuo si ha $g \cdot Q \neq g' \cdot Q$ per ogni $g \neq g'$. Allora p mappa V su U in modo iniettivo. p è un omeomorfismo da U su V.

Se W è una componente connessa di $p^{-1}(U)$ con $W \neq V$, esiste un elemento $g \in G$ con $g \cdot V = W$. Siccome g è un automorfismo da V su W e $p = p \circ g$, W è omeomorfo a U. Allora U è un intorno elementare di Q. $(\widetilde{X}, p)$ è un rivestimento di $\widetilde{X}/G$.

È ovvio che ogni automorfismo $g \in G$ è un automorfismo di $A(\widetilde{X}, p)$, allora

$$G \subseteq A(\widetilde{X}, p).$$

Se per assurdo $G \neq A(\widetilde{X}, p)$, allora $A(\widetilde{X}, p)$ contiene elementi $f \neq Id$, $f \notin G$ con punti fissi. Per il corollario 2.8.2 un elemento $f \in A(\widetilde{X}, p)$ con punti fissi è l'identità $f = Id$, il che contraddice le ipotesi.
Dal lemma 2.10.1 segue che $(\widetilde{X}, p)$ è un rivestimento regolare. □

2.11 Il teorema di esistenza di rivestimenti

Abbiamo fatto vedere che un rivestimento $(\widetilde{X}, p)$ di X è determinato a meno di isomorfismi dalla classe di coniugio del sottogruppo $p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x})$ di $\pi(X, x)$. Ora invertiamo il problema e ci poniamo seguente domanda:
Sia X uno spazio topologico e supponiamo che sia nota una classe di coniugio di sottogruppi di $\pi(X, x)$. Esiste un rivestimento $(\widetilde{X}, p)$ di X tale che $p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x})$ appartenga alla classe di coniugio data?

Innanzitutto ci riconduciamo al caso in cui la classe di coniugio di sottogruppi data è banale (ovvero uguale a $\{1\}$).

Lemma 2.11.1. *Sia X uno spazio topologico con rivestimento universale. Allora per ogni sottogruppo di $\pi(X, x)$ esiste un rivestimento $(\widetilde{X}, p)$ di X, con $\widetilde{x} \in p^{-1}(x)$ punto fissato, tale che $p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x})$ è il sottogruppo dato.*

Per una dimostrazione rimandiamo il lettore a [1], *pagina 41, Lemma 10.1.*

Quindi la domanda può essere riformulata come segue: Quali spazi topologici hanno rivestimenti universali?

Definizione 29. Uno spazio si dice **semilocalmente semplicemente connesso** se e solo se ogni punto $x \in X$ ha un intorno U tale che ogni cappio in U è contraibile ad un punto in X.

Osservazione 2. Ogni varietà reale o complessa è semilocalmente semplicemente connessa.

Esempio 2.2. Trattiamo un esempio di spazio connesso e localmente connesso per archi, ma non semilocalmente semplicemente connesso. Per ogni intero n, sia

$$C_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x - \frac{1}{n} \right)^2 + y^2 = \frac{1}{n^2} \right\}.$$

I C_n sono i cerchi di raggio $\frac{1}{n}$ centrati in $(\frac{1}{n}, 0)$. Sia X l'unione di tutti i cerchi C_n per ogni intero n. Allora X non è semilocalmente semplicemente

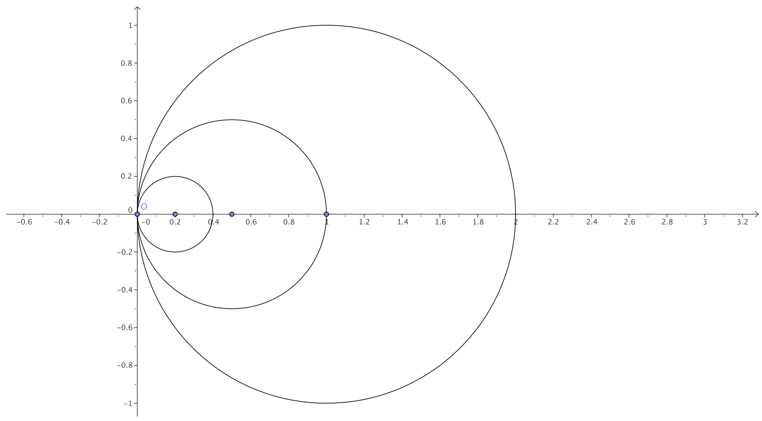

Figura 2.1: Tre cerchi C_n, per $n = 1, 2, 5$.

connesso, perché il punto $(0, 0)$ non ha un intorno U con le proprietà richieste.

Teorema 2.11.2 (di esistenza di un rivestimento universale di uno spazio topologico)**.** *Sia X uno spazio topologico connesso, localmente connesso per archi e semilocalmente semplicemente connesso. Allora per ogni sottogruppo di $\pi(X, x)$ esiste un rivestimento $(\widetilde{X}, p)$ di X, con $\widetilde{x} \in p^{-1}(x)$ punto fissato, tale che $p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x})$ è il sottogruppo dato.*

Dimostrazione. Ci basta provare che esiste un rivestimento universale di X e poi applicando il lemma 2.11.1 si ha la tesi.

Prima di costruire un rivestimento universale di X cerchiamo di spiegare l'idea.

Assumiamo che X abbia un rivestimento universale $(\widetilde{X}, p)$. Scegliamo un punto base $\widetilde{x}_0 \in \widetilde{X}$ e sia $x_0 = p(\widetilde{x}_0)$. Dato un altro punto $y \in \widetilde{X}$. Siccome $\widetilde{X}$ è connesso per archi, esiste un cammino f con punto iniziale $\widetilde{x}_0$ e punto finale y. $\widetilde{X}$ è anche semplicemente connesso e per questo il cammino è unico a meno di omotopia. Sia α la classe dei cammini omotopi a f.
Ora consideriamo la funzione che assegna ad ogni punto y la classe del cammino aperto $p_*(\alpha)$ in X. Per i lemma 2.3.1 e 2.3.2 esiste una corrispondenza biunivoca tra $\widetilde{X}$ e l'insieme delle classi di cammini aperti in X che hanno come punto iniziale x_0.
Possiamo così identificare i punti di $\widetilde{X}$ con le classi di cammini aperti in X con punto iniziale x_0. Quest'ultima osservazione è alla base della seguente costruzione:
Scegliamo un punto base $x_0 \in X$ e definiamo $\widetilde{X}$ come l'insieme di tutte le classi di equivalenza di cammini aperti α in X che hanno come punto iniziale

x_0. Definiamo una funzione $p\colon \widetilde{X} \to X$ tale che $p(\alpha)$ sia uguale al punto finale della classe di cammini α.

Topologia su $\widetilde{X}$:
$\widetilde{X}$ è semplicemente connesso e $(\widetilde{X}, p)$ è un rivestimento di X. Osserviamo che dalla nostra ipotesi segue che la topologia su X ha una base costituita da aperti U con le seguenti proprietà: U è semplicemente connesso e l'omomorfismo $\pi(U) \to \pi(X)$ è banale (ovvero ogni cappio in U è omotopo (in X) ad un punto).

Definizione 30. Chiamiamo questo insieme U **aperto base**. Se x e y sono due punti nell'aperto base allora due cammini f e g in U con punto iniziale x e punto finale y sono omotopi (in X).

Definizione 31. Data una classe di cammini aperti $\alpha \in \widetilde{X}$ e un intorno base aperto U del punto finale $p(\alpha)$ di α. Denotiamo con (α, U) l'insieme di tutti i cammini $\beta \in \widetilde{X}$, tale che per una classe di cammini aperti α' in U vale $\beta = \alpha \cdot \alpha'$. α' ha come punto iniziale il punto finale di α.

Allora (α, U) è un sottoinsieme di $\widetilde{X}$ e $\alpha \in (\alpha, U)$. Per far vedere che la famiglia di tutti gli insiemi (α, U) forma una base per la topologia su $\widetilde{X}$ è necessario mostrare la seguente affermazione. *Se $\gamma \in (\alpha, U) \cap (\beta, V)$ allora esiste un insieme base aperto W tale che $(\gamma, W) \subset (\alpha, U) \cap (\beta, V)$*:
Basta scegliere W come aperto base tale che $p(\gamma) \in W \subset U \cap V$. Siccome $\gamma \in (\alpha, U) \cap (\beta, V)$ esistono classi di cammini aperti α' in U e β' in V, tali che $\gamma = \alpha \cdot \alpha'$ e $\gamma = \beta \cdot \beta'$. Allora $\forall \delta \in (\gamma, W)$ segue $\delta \in (\alpha, U) \cap (\beta, V)$ in quanto si ha $\delta = \gamma \cdot \gamma' = \alpha \cdot \alpha' \cdot \gamma'$ (e analogamente $\delta = \beta \cdot \beta' \cdot \gamma'$). Possiamo concludere dicendo che $\alpha' \cdot \gamma'$ è una classe di cammini aperti in U, perché γ' lo è in $W \subset U \cap V$ (ragionamento analogo per la classe di cammini $\beta' \cdot \gamma'$ in V). Quindi γ è una classe di cammini aperti in $(\alpha, U) \cap (\beta, V)$.

Prima di procedere con la dimostrazione che $(\widetilde{X}, p)$ sia un rivestimento universale di X, conviene fare altre due osservazioni:

a.) Sia $\alpha \in \widetilde{X}$ e sia U un intorno base aperto di $p(\alpha)$. Allora $p|(\alpha, U)$ è una corrispondenza biunivoca da (α, U) in U.

b.) Sia U un aperto base e sia x un punto di U. Allora
$$p^{-1}(U) = \bigcup_{\gamma} (\alpha_\gamma, U)$$
dove $\{\alpha_\gamma\}$ è l'insieme di tutte le classi di cammini in X con punto iniziale x_0 e punto finale x. Inoltre gli insiemi (α_γ, U) sono a due a due disgiunti.

Da b.) segue che p è continua. a.) invece ci dice che $p|(\alpha, U)$ è una corrispondenza biunivoca tra (α, U) e U e $p|(\alpha, U)$ è aperto. Ogni sottoinsieme di (α, U) è unione di insiemi della forma (β, V), con $V \subset U$.

p è un omeomorfismo tra (α, U) e U. Siccome U è connesso per archi, lo è anche (α, U). Inoltre gli insiemi (α_γ, U) sono a coppie disgiunti segue che ogni insieme base $U \subset X$ soddisfa tutte le proprietà di un intorno elementare.

Dimostriamo ora le seguenti due proprietà:

1. $\widetilde{X}$ è connesso per archi: Denotiamo con $\widetilde{x}_0 \in \widetilde{X}$ la classe di equivalenza di cammini costanti in x_0. Dato un punto $\alpha \in \widetilde{X}$, è sufficiente trovare un arco che collega i punti $\widetilde{x}_0$ e α. A questo scopo scegliamo un cammino $f\colon I \to X$ rappresentante la classe di equivalenza α. Per ogni numero reale $s \in I$, definiamo $f_s\colon I \to X$ come $f_s(t) = f(st)$, con $t \in I$. Allora sicuramente $f_1 = f$ $f_0 = x_0$, ovvero f_0 è il cammino costante in x_0. Sia α_s la classe di equivalenza del cammino f_s.
   Diciamo che $I \to \widetilde{X}$ che manda $s \to \alpha_s$ è una mappa continua, ovvero è un cammino in $\widetilde{X}$: per provare l'affermazione, dobbiamo verificare che $\forall s_0 \in I$ e per ogni intorno base aperto U di $f(s_0)$, esiste un numero reale $\epsilon > 0$ tale che $|s - s_0| < \epsilon$, allora si ha $\alpha_s \in (\alpha_{s_0}, U)$. Quindi scegliamo $\epsilon > 0$ tale che $|s - s_0| < \epsilon$, allora $f(s) \in U$. Un numero ϵ che soddisfa la richiesta esiste per continuità di f.
   Quindi $s \to \alpha_s$ è un cammino in $\widetilde{X}$ con punto iniziale $\widetilde{x}_0$ e punto finale α.

2. $\widetilde{X}$ è semplicemente connesso: Abbiamo spiegato in 2.9 che $p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ è lo stabilizzatore corrispondente al punto $\widetilde{x}_0$ per l'azione di $\pi(X, x)$ sull'insieme $p^{-1}(x_0)$. Dobbiamo determinare $\widetilde{x}_0 \cdot \alpha$ per qualche $\alpha \in \pi(X, x_0)$. Scelto un cammino $f\colon I \to X$ rappresentante la classe di cammini α e definiamo come prima $s \to \alpha_s$ in $\widetilde{X}$. Questo cammino in $\widetilde{X}$ ha $\widetilde{x}_0$ come punto iniziale, $\alpha \in \widetilde{X}$ come punto finale (per il paragrafo precedente), ed è un sollevamento del cammino f. Per la definizione di azione di $\pi(X, x_0)$ su $p^{-1}(x_0)$ si ha $\widetilde{x}_0 \cdot \alpha = \alpha$. Per questo $\widetilde{x}_0 \cdot \alpha = \widetilde{x}_0$ se e solo se $\alpha = 1$. Lo stabilizzatore è banale, ovvero uguale a $\{1\}$.

□

Capitolo 3

Superfici di Riemann e rivestimenti ramificati

3.1 Superfici di Riemann

Sia X uno spazio topologico.

Definizione 32. Una **carta complessa** (di dimensione 1) su X è una coppia (U, φ), dove $U \subset X$ è un aperto di X e $D \subset \mathbb{C}$ un aperto del piano complesso.
L'aperto U è il **dominio** della carta φ e la carta φ si dice **centrata** in $P \in U$ se $\varphi(P) = 0$.
Due carte $\varphi_1 \colon U_1 \longrightarrow D_1$ e $\varphi_2 \colon U_2 \longrightarrow D_2$ su X si dicono **compatibili** se $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ oppure se la **funzione di transizione**

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} \colon \varphi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

è una funzione olomorfa.
Un atlante complesso su X è una collezione $\{\varphi_i \colon U_i \longrightarrow D_i\}$ di carte a due a due compatibili tali che $X = \bigcup_i U_i$.
Due atlanti complessi sono **equivalenti** se ogni carta di uno è compatibile con ogni carta dell'altro, ossia se la loro unione è ancora un atlante complesso. Si dimostra facilmente che ogni atlante complesso è contenuto in un unico atlante complesso massimale[1] e che due atlanti sono equivalenti se e solo se sono contenuti nello stesso atlante massimale.
Chiamiamo **struttura complessa** di dimensione 1 su X un atlante complesso massimale o una classe di equivalenza di atlanti complessi su X.

Si dice **superficie di Riemann** uno spazio topologico X di Hausdorff, connesso e a base numerabile, dotato di una struttura complessa di dimensione 1.

[1] L'atlante complesso massimale è l'unione di tutti gli atlanti ad esso equivalenti.

Date X e Y superfici di Riemann, un'applicazione $f\colon X \longrightarrow Y$ si dice olomorfa in $P \in X$ se per ogni coppia di carte $\varphi_1\colon U_1 \longrightarrow D_1$ su X e $\varphi_2\colon U_2 \longrightarrow D_2$ su Y con $P \in U_1$ e $f(P) \in U_2$ si ha che l'applicazione composta $\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1}$ è olomorfa in $\varphi_1(P)$.
f si dice **applicazione olomorfa** se è olomorfa in ogni punto di X.
Un **isomorfismo** tra superfici di Riemann è un'applicazione olomorfa $f\colon X \longrightarrow Y$ biunivoca con inversa $f^{-1}\colon Y \longrightarrow X$ olomorfa.
Un isomorfismo di una superficie di Riemann in se stessa $X \longrightarrow X$ si dice **automorfismo** di X.

N.B.: Da ora in poi consideriamo superfici di Riemann **compatte**.
Spesso indicheremo una superficie di Riemann con la lettera C.

3.2 Rivestimenti ramificati

Una mappa olomorfa tra due superfici di Riemann si può scrivere nella **forma normale locale**:

Teorema 3.2.1. *Sia $p\colon C \to C'$ una funzione olomorfa non costante tra due superfici di Riemann. Sia $P \in C$.*
Allora esiste un unico intero $m \geq 1$, tale che per ogni carta $\varphi_2\colon U_2 \longrightarrow V_2$ su C' centrata in $p(P)$ esiste una carta $\varphi_1\colon U_1 \longrightarrow V_1$ su C centrata in P, tale che

$$\varphi_2(p(\varphi_1^{-1}(z))) = z^m.$$

Per una dimostrazione dettagliata rimandiamo il lettore a [2], *a pagina 44, Proposizione 4.1.*

Definizione 33. La **molteplicità** di p in P la denotiamo con $\mathrm{mult}_P(p)$ ed è l'unico intero m tale che localmente (in P) p ha la forma $z \longrightarrow z^m$.
Sia $p\colon C \longrightarrow C'$ una mappa olomorfa non costante.
Un punto $P \in C$ viene detto **punto di ramificazione** per p se $mult_P(p) \geq 2$.
Un punto $Q \in C'$ viene detto **valore critico** se è l'immagine del punto di ramificazione P tramite p.

Andiamo a vedere alcune proprietà di funzioni olomorfe tra superfici di Riemann compatte:

Proposizione 3.2.2. *Sia $p\colon C \longrightarrow C'$ una mappa olomorfa non costante tra due superfici di Riemann. Per ogni $Q \in C'$, definiamo $d_Q(p)$ la somma delle molteplicità di p nei punti di C che vengono mappati in Q:*

$$d_Q(p) = \sum_{P \in p^{-1}(Q)} mult_P(p).$$

Allora $d_Q(p)$ è costante ed indipendente da Q.

Per una dimostrazione dettagliata rimandiamo il lettore a [2], *a pagina 47, Proposizione 4.8.*

Introduciamo ora la nozione di rivestimento ramificato:

Definizione 34. Date due superfici di Riemann C e C' diremo che un'applicazione è un **rivestimento ramificato** a r fogli se per ogni punto $Q \in C'$ esiste un intorno aperto U di Q in C' per cui $p^{-1}(U)$ è unione disgiunta di aperti connessi U_i tali che $U_i \cap p^{-1}(Q)$ contiene un solo punto P_i, e la restrizione di p a $\bigcup U_i \setminus \{P_i\}$ è un rivestimento connesso a $v(P_i)$ fogli di $U \setminus \{Q\}$ per qualche $v(P_i) \in \mathbb{N}$. Inoltre per ogni punto $Q \in C'$

$$\sum_{P_i \in p^{-1}(Q)} v(P_i) = r.$$

Il numero $v(P_i)$ si dice **indice di ramificazione** di p in P_i.
Un punto $P \in C$ si dice **punto di ramificazione** se $v(P) > 1$, se $v(P) = 1$ si dice **punto regolare**.

Definizione 35. Sia $p\colon C \longrightarrow C'$ una funzione olomorfa non costante tra due superfici di Riemann. Il **grado** di p, denotato con $\deg(p)$, è il numero intero $d_Q(p)$, per un punto $Q \in C'$.

Teorema 3.2.3. *Sia $p\colon C \longrightarrow C'$ un'applicazione olomorfa non costante tra superfici di Riemann. Allora per ogni punto $Q \in C'$ si ha che $p^{-1}(Q)$ è un sottoinsieme discreto di C. In particolare se C e C' sono compatte, allora $p^{-1}(Q)$ è finito e non vuoto.*

La dimostrazione la rimandiamo a [2], *pagina 41, Proposizione 3.12.*

Per quanto detto in precedenza sui punti di ramificazione possiamo enunciare il seguente teorema:

Teorema 3.2.4. *Ogni applicazione $p\colon C \longrightarrow C'$ olomorfa non costante tra superfici di Riemann è un rivestimento ramificato.*
Il numero di fogli del rivestimento è il grado di p. Per ogni punto $Q \in C'$, dato $P_i \in p^{-1}(Q)$ si ha

$$v(P_i) = mult_{P_i}(p).$$

3.3 Stabilizzatori

Supponiamo ora di avere un gruppo finito G che agisce su una superficie di Riemann C, e supponiamo che l'azione sia olomorfa.
Lo scopo è di dotare lo spazio quoziente C/G di una struttura di superficie di Riemann in modo che la proiezione p sia olomorfa. Prima però dobbiamo esaminare gli stabilizzatori, sottogruppi di G.

Teorema 3.3.1. *Sia G un gruppo che agisce in modo olomorfo ed effettivo su una superficie di Riemann C e che fissa un punto $P \in C$. Supponiamo inoltre che lo stabilizzatore G_P sia un sottogruppo finito di G.*
Allora lo stabilizzatore G_P è un sottogruppo ciclico.

In particolare, se G è finito, tutti i suoi stabilizzatori sono sottogruppi ciclici finiti.

Dimostrazione. Fissiamo una coordinata locale z centrata in P. Per ogni $g \in G_P$ avremo

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(g) z^n.$$

Questo sviluppo in serie non ha termini costanti, perché $g(P) = P$. Notiamo che il termine $a_1(g) \neq 0$, siccome g è un automorfismo su C ed ha derivata non nulla in ogni punto, in particolare in P.

Consideriamo la funzione $a_1 \colon G_P \longrightarrow \mathbb{C}^*$. Si verifica facilmente che è un omomorfismo di gruppi tramite lo sviluppo in serie di $g(h(z))$:

$$\begin{aligned} g(h(z)) &= g(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(h) z^n) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} a_m(g) \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(h) z^n \right)^m \\ &= a_1(g) a_1(h) z + \text{ termini di ordine maggiore.} \end{aligned}$$

Allora $a_1(gh) = a_1(g) a_1(h)$.
Vogliamo mostrare che l'omorfismo è anche iniettivo:
Consideriamo $g \in Ker(a_1)$; questo vuol dire che

$$g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(h) z^n.$$

Per dimostrare che il nucleo è banale, dobbiamo mostrare che $g(z) = z$.

Supponiamo per assurdo che $g(z) \neq z$ e sia $m \geq 2$ l'esponente del primo termine di g diverso da zero di ordine maggiore di 1. Quindi $g(z) = z + az^m \mod (z^{m+1})$ con $a \neq 0$.
Si verifica per induzione che $g^k = z + kaz^m \mod (z^{m+1})$. Lo stabilizzatore è un sottogruppo finito e quindi per qualche k si ha $g^k = Id_G$, cioè $g^k(z) = z$. Da questo segue che $ka = 0$ per qualche k e quindi $a = 0$. Questa contraddizione ci dice che di fatti g è l'identità.
Sappiamo allora che $a_1(g) \colon G_P \longrightarrow \mathbb{C}^*$ è un omomorfismo di gruppi ed è iniettivo, ma i sottogruppi finiti di $\mathbb{C}^*$ sono ciclici. Segue la tesi. □

La dimostrazione del seguente teorema la rimandiamo a [2], *pagina 29.*

Teorema 3.3.2. *Siano f e g due applicazioni olomorfe tra due superfici di Riemann C e C'. Se $f = g$ su un sottoinsieme di C che contiene un punto di accumulazione in C allora $f = g$ su tutto C.*

Proposizione 3.3.3. *Sia G un gruppo finito che agisce in modo olomorfo ed effettivo su una superficie di Riemann C.*
Allora i punti di C con stabilizzatore non banale formano un sottoinsieme discreto e quindi finito di C.

Dimostrazione. Supponiamo che esista una successione $\{P_n\}$ di punti di C convergente ad un punto P e che ogni P_i sia fissato da un $g_i \in G$ con $g_i \neq Id_G$. Dal momento che G è un gruppo finito possiamo, estraendo una sottosuccessione, assumere che ogni P_i sia fissato dallo stesso elemento non banale g. Poiché g è continua, deve fissare anche il punto limite P. Ma g è anche un automorfismo olomorfo su C e sappiamo per il teorema 3.3.2 che due applicazioni olomorfe tra superfici di Riemann che coincidono su un sottoinsieme con un punto di accumulazione coincidono su tutto il dominio. Siccome G agisce in modo effettivo, g è l'identità. Questa contraddizione prova che l'insieme dei punti con stabilizzatore non banale non può avere punti di accumulazione. □

3.4 Il quoziente di una superficie di Riemann

Al fine di costruire una struttura complessa per la superficie quoziente C/G è necessario il seguente teorema.

Teorema 3.4.1. *Sia G un gruppo finito che agisce in modo effettivo ed olomorfo su una superficie di Riemann C. Sia $P \in C$ un punto fissato.*
Allora esiste un intorno aperto U di P tale che:

(a) U è invariante per l'azione di G_P, cioè

$$g \cdot Q \in U \text{ per ogni } g \in G_P \text{ e } Q \in U.$$

(b) $U \cap (g \cdot U) = \emptyset$ per ogni $g \notin G_P$.

(c) l'applicazione naturale $\alpha \colon U/G_P \longrightarrow X/G$, che manda un punto di U nella sua orbita, è un omeomorfismo su un aperto di X/G.

(d) se $Q \in U$, $Q \neq P$ allora Q non è fissato da nessun elemento di G_P; questo vuol dire che nessun punto di U, eccetto P, viene fissato dagli elementi di G_P.

Dimostrazione. (a) Sia $G \setminus G_P = \{g_1, \ldots, g_n\}$ l'insieme degli elementi di G che non fissano P. Siccome C è di Hausdorff, per ogni i, possiamo trovare aperti V_i di P e W_i di $g_i \cdot P$ tali che $V_i \cap W_i = \emptyset$. Notiamo che

$g_i^{-1} \cdot W_i$ è un intorno aperto di P per ogni i.
Sia $R_i = V_i \cap (g_i^{-1} \cdot W_i)$, $R = \bigcap_i R_i$ e sia

$$U = \bigcap_{g \in G_P} g \cdot R.$$

Ogni R_i è un intorno aperto di P, quindi lo sono anche R e U. Questo vuol dire che $g \cdot U = U$ per ogni $g \in G_P$.

(b) Notiamo che $R_i \cap (g_i \cdot R_i) \subset V_i \cap W_i = \emptyset \Rightarrow R_i \cap (g_i \cdot R_i) = \emptyset$; allora $R \cap (g_i \cdot R) = \emptyset$ e $U \cap (g_i \cdot U) = \emptyset$ per ogni i.

(c) La mappa $\alpha \colon U/G_P \longrightarrow X/G$ è iniettiva, continua e aperta perché composta con la proiezione $U \to U/G_P$ dà l'applicazione quoziente $\pi\big|_U$ che è continua e aperta.

(d) Restringendo opportunamente U e ricordando la tesi della proposizione 3.3.3, ovvero che l'insieme dei punti con stabilizzatore non banale è discreto, segue che nessun punto di U, eccetto P, viene fissato dagli elementi di G_P.

□

Grazie a quest'ultimo teorema possiamo definire delle carte su U/G_P e trasportarle su C/G tramite l'applicazione α. Possiamo così definire delle carte su C/G. Vedremo nella dimostrazione del seguente teorema come fare.

Teorema 3.4.2. *Sia G un gruppo finito che agisce in modo effettivo ed olomorfo su una superficie di Riemann C.*
Allora si può costruire una struttura complessa che renda C/G una superficie di Riemann, e tale che l'applicazione quoziente $p \colon C \longrightarrow C/G$ sia olomorfa di grado $|G|$, e per ogni punto $P \in C$ si abbia $mult_P(p) = |G_P|$.

Dimostrazione. Andiamo dunque a costruire le carte su C/G. Scegliamo un punto $\overline{P} \in C/G$ e supponiamo che $\overline{P}$ sia l'orbita di un punto $P \in C$.

Esaminiamo prima il caso dello stabilizzatore di P banale $|G_P| = 1$: per la proposizione 3.4.1 esiste un intorno U di P, tale che $p\big|_U \colon U \longrightarrow W \subset C/G$ è un omeomorfismo sull'aperto W di $\overline{P}$. Restringendo U opportunamente possiamo assumere che U è un dominio di una carta $\varphi \colon U \longrightarrow V$ su C.
Dal momento che sia φ che $p\big|_U$ sono omeomorfismi, la composizione $\psi = \varphi \circ p\big|_U^{-1}$ è una carta su C/G.

Consideriamo ora il caso in cui $m = |G_P| \geq 2$.
Usando il teorema 3.4.1 scegliamo un intorno aperto U di P che sia G_P-invariante e tale che l'applicazione $\alpha \colon U/G_P \longrightarrow W$ sia un omeomorfismo su un intorno W di $\overline{P}$. Inoltre assumiamo che l'applicazione $U \longrightarrow U/G_P$

sia esattamente di grado m.
Cerchiamo una carta $\varphi\colon W \longrightarrow \mathbb{C}$. La composizione di φ con α e l'applicazone quoziente da U a U/G_P è una funzione G_P-invariante[2]

$$h\colon U \longrightarrow U/G_P \xrightarrow{\ \alpha\ } W \xrightarrow{\ \varphi\ } \mathbb{C}$$

su un intorno di P.
Vogliamo trovare φ costruendo prima h.
Sia z una coordinata locale centrata in P. Per ogni $g \in G_P$, abbiamo la funzione $g(z)$, che ha molteplicità 1 in P. Definiamo

$$h(z) = \prod_{g \in G_P} g(z).$$

h ha molteplicità $m = |G_P|$ nel punto P ed è definita in un intorno G_P-invariante di P; restringendo opportunamente U possiamo assumere che h sia definita su U.
h è olomorfa e G_P-invariante[2], quindi possiamo definire

$$\overline{h}\colon U/G_P \longrightarrow \mathbb{C}.$$

$\overline{h}$ è aperta, perché h è aperta.
Inoltre $\overline{h}$ è iniettiva: infatti l'applicazione h ha molteplicità m e quindi è di grado m in un intorno di P, così come l'applicazione da U in U/G_P su $U \setminus P$.
Se $\overline{h}$ è iniettiva, continua e aperta allora è un omeomorfismo.
Componendo $\overline{h}$ con α^{-1} otteniamo:

$$\varphi\colon W \xrightarrow{\ \alpha^{-1}\ } U/G_P \xrightarrow{\ \overline{h}\ } V \subset \mathbb{C}.$$

Notiamo che il primo caso di molteplicità 1 è un caso speciale del secondo: se $m = 1$, allora $h(z) = z$ e ritroviamo le stesse carte descritte nel primo caso.
Queste carte ricoprono C/G. Dobbiamo mostrare che sono tutte compatibili e formano un atlante complesso su C e quindi una struttura complessa.
Dal momento che l'insieme dei punti con stabilizzatore non banale è discreto, possiamo assumere che i domini delle carte costruite nel caso $m \geq 2$ siano a due a due disgiunti.
Se due carte sono entrambe costruite nel caso $m = 1$ allora sono compatibili poiché lo erano le carte originali su C.

Infine supponiamo di avere due carte:
$\varphi_1\colon \overline{U}_1 \longrightarrow V_1$ costruita nel caso $m = 1$ e una carta $\varphi_2\colon \overline{U}_2 \longrightarrow V_2$ costruita nel caso $m \geq 2$.
Siano U_1 e U_2 gli aperti in C usati per costruire le due carte φ_1 e φ_2.

[2]ovvero $h(g \cdot P) = g \cdot h(P)$, $\forall g \in G_P$.

Scegliamo un punto $\overline{R} \in \overline{U}_1 \cap \overline{U}_2$ e solleviamolo ad un punto $R \in U_1 \cap U_2$ (se $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, sostituiamo U_1 con un traslato tramite il gruppo che intersechi U_2.) Sia w una coordinata locale in U_1 e z una coordinata locale in U_2. Su $\overline{U}_1$ w è ancora una coordinata locale, mentre su $\overline{U}_2$ abbiamo come coordinata locale $h(z)$ che è stata costruita sopra. Ma h è una funzione olomorfa e z e w sono compatibili, quindi φ_1 e φ_2 sono compatibili.
Siccome G è un gruppo finito e C uno spazio di Hausdorff, allora anche C/G lo è. C è connessa e $p\colon C \longrightarrow C/G$ è suriettiva, allora anche il quoziente C/G è connesso. Le carte definite rendono C/G una superficie di Riemann. È immediato verificare dalla definizione delle carte su C/G che p è olomorfa; chiaramente il grado di p è l'ordine del gruppo G.
La molteplicità di p in un punto P è esattamente la molteplicità della funzione h che è precisamente $|G_P|$. □

L'analisi precedente da luogo ad un corollario che descrive come i gruppi finiti agiscono localmente sulle superfici di Riemann. È un altro modo per esprimere la forma normale locale.

Corollario 3.4.3. *(Linearizzazione dell'azione di un gruppo)*
Sia G un gruppo finito che agisce in modo effettivo ed olomorfo su una superficie di Riemann C. Sia $P \in C$ un punto con stabilizzatore non banale di ordine m e sia g un generatore di G_P.
Allora esiste una coordinata locale z su C centrata in P tale che $g(z) = \lambda z$, dove λ è una radice primitiva m-esima dell'unità. Sostituendo g con un altro generatore di G_P, otteniamo $\lambda = exp\left(\frac{2\pi i}{m}\right)$.)

Dimostrazione. Scegliamo una coordinata locale w su C/G intorno a $G \cdot P$. Sappiamo che esiste una coordinata locale z su C centrata in P tale che localmente p si rappresenta come $w = z^m$.
Le controimmagini di punti corrispondenti a piccoli valori di w differiscono nella coordinata z per radici m-esime dell'unità. Ma queste controimmagini sono anche orbite per l'azione di G_P, quindi per piccoli valori di z una G_P-orbita consiste esattamente dei punti $\left\{\exp(\frac{2\pi ik}{m})z \middle| 0 \le k \le m-1\right\}$. Da questo segue che $g(z) = \lambda z$ per qualche $\lambda = \exp(\frac{2\pi ik}{m})$. □

3.5 Ramificazione della mappa quoziente e la formula di Riemann-Hurwitz

Richiamiamo alcune proprietà che servono per derivare la formula di Riemann-Hurwitz.
Sia S una superficie compatta.

Definizione 36. Una **triangolazione** di S è una decomposizione di S in sottoinsiemi chiusi, ognuno omeomorfo ad un triangolo, in modo che i triangoli siano a coppie distinti e che si incontrano solamente in un vertice oppure

lungo un lato.
Supponiamo data una triangolazione di S con v vertici, l lati e f triangoli. La **caratteristica di Eulero-Poincaré** di S, rispetto alla triangolazione scelta, descrive la relazione tra i vertici, lati e facce dei triangoli:

$$\chi(S) = v - l + f.$$

Proposizione 3.5.1. *Sia S una superficie di Riemann con genere g. La caratteristica di Eulero-Poincaré è indipendente dalla scelta della triangolazione di S ed è uguale a*

$$\chi(S) = 2 - 2g.$$

La dimostrazione la rimandiamo a [2], *pagine 51, Proposizione 4.15.* Combinando la caratteristica di Eulero-Poincaré di due superfici di Riemann compatte con il grado della mappa olomorfa tra loro e gli indici di ramificazione, otteniamo la formula di Riemann-Hurwitz.

Teorema 3.5.2. *Sia $f\colon C \longrightarrow C'$ una funzione olomorfa di grado n tra superfici di Riemann. Allora la caratteristica di Eulero-Poincaré di C e quella di C' sono legate dalla relazione:*

$$\chi(C) = n \cdot \chi(C') - \sum_{P \in C} \left(mult_P(f) - 1 \right),$$

dove $mult_P(f)$ è l'indice di ramificazione di f nel punto $P \in C$.

Dimostrazione. Dal momento che C è compatta, l'insieme E dei punti di ramificazione è finito. I termini della sommatoria sono diversi da zero nei punti di E, nulli invece nei punti di C non appartenenti ad E. Si tratta dunque di una somma finita.
Consideriamo una triangolazione di C' tale che ogni valore critico di f sia un vertice.
Dal momento che f è un rivestimento non ramificato su $C \setminus E$ e che le celle della triangolazione di C' sono semplicemente connesse, possiamo scegliere una triangolazione di C le cui celle aperte siano proprio le componenti connesse delle immagini inverse delle celle aperte della triangolazione di C'.
Indichiamo con v, l e f il numero, rispettivamente dei vertici, dei lati e dei triangoli in C' e con v', l' e f' il numero, rispettivamente dei vertici, dei lati e dei triangoli in C.
Se non ci sono punti di ramificazione ogni triangolo di C' viene sollevato a n triangoli in C. La stessa cosa vale per i vertici e i lati dei triangoli. Si ottiene dunque la formula di Riemann-Hurwitz nel caso non ramificato:

$$\chi(C) = n\chi(C').$$

Se E è non vuoto, è ancora vero che ogni triangolo e ogni lato di C' viene sollevato a n triangoli (risp. lati) di C, ma non è più vera l'affermazione

analoga per i vertici.
Sia $Q \in C'$ un punto fissato. Il numero di preimmagini di Q in C è $|f^{-1}(Q)|$, ovvero

$$\begin{aligned} |f^{-1}(Q)| &= \sum_{P \in f^{-1}(Q)} 1 \\ &= n + \sum_{P \in f^{-1}(Q)} [1 - \mathrm{mult}_P(f)] \, . \end{aligned}$$

Quindi il numero totale di vertici di C che si ottengono è:
(Con P_v e Q_v intendiamo tutti i vertici delle triangolazioni di C e C' rispettivamente e non solo i punti di ramificazione e valori critici).

$$\begin{aligned} v' &= \sum_{Q_v \in C'} \left\{ n + \sum_{P \in f^{-1}(Q_v)} [1 - \mathrm{mult}_P(f)] \right\} \\ &= nv + \sum_{Q_v \in C'} \sum_{P \in f^{-1}(Q_v)} [1 - \mathrm{mult}_P(f)] \\ &= nv + \sum_{P_v \in C} [1 - \mathrm{mult}_{P_v}(f)] \, . \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned} \chi(C) &= v' - l' + f' \\ &= nv + \sum_{P_v \in C} [1 - \mathrm{mult}_{P_v}(f)] - nl + nf \\ &= n\chi(C') + \sum_{P \in C} [1 - \mathrm{mult}_P(f)] \, ; \end{aligned}$$

l'ultima uguaglianza vale perché ogni punto di ramificazione di f è un vertice delle triangolazione di C ed ogni vertice di C che non è un punto di ramificazione di f ha $\mathrm{mult}_P(f) = 1$. $\square$

Se $C' = C/G$ la formula di Hurwitz assume un'espressione più elegante. Dobbiamo prima fare qualche osservazione:
Sia G un gruppo finito che agisce in modo olomorfo ed effettivo su una superficie di Riemann C, ottenendo così il quoziente $C' = C/G$. Supponiamo che $Q \in C/G$ sia un valore critico della mappa quoziente $p \colon C \longrightarrow C/G$. Siano $P_1, ..., P_s$ i punti di C che stanno nella fibra di Q, ovvero

$$p^{-1}(Q) = \{P_1, \dots, P_s\} \, .$$

Questi punti sono nella stessa orbita sotto l'azione di G su C e hanno dunque stabilizzatori coniugati, in particolare ogni stabilizzatore ha lo stesso ordine r. Indichiamo lo stabilizzatore con

$$H_Q = \left\{ \sigma \in G \middle| \sigma \cdot P_i = P_i \text{ con } i = 1, \dots, s \right\} .$$

Il numero s di punti della fibra è l'indice dello stabilizzatore in G e si ha dunque

$$s = |p^{-1}(Q)| = [G : H_Q] = \frac{|G|}{|H_Q|} = \frac{|G|}{r}.$$

Riformulando la formula di Riemann-Hurwitz del teorema 3.5.2 in questo caso si deduce il seguente corollario:

Corollario 3.5.3. *Sia G un gruppo finito che agisce in modo olomorfo ed effettivo su una superficie di Riemann C con la mappa quoziente $p\colon C \to C/G$. Supponiamo di avere k valori critici $Q_1, \dots, Q_k \in C/G$, sia r_j la molteplicità di p nei punti della fibra di Q_j. Allora $\forall j$ $r_j \big| |G|$ e*

$$\begin{aligned} 2g_C - 2 &= |G| \left(2g_{C/G} - 2\right) + \sum_{j=1}^{k} \frac{|G|}{r_j} (r_j - 1) \\ &= |G| \left[2g_{C/G} - 2 + \sum_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{r_j}\right) \right]. \end{aligned}$$

Capitolo 4

Il gruppo degli automorfismi di una superficie di Riemann

4.1 Il teorema di Hurwitz

Nel 1893 Adolf Hurwitz introdusse la formula di Riemann-Hurwitz trattata nel capitolo precedente. Con l'aiuto di questa formula si dimostra il teorema di Hurwitz sui gruppi di automorfismi.
Il teorema di Schwarz afferma che il gruppo di automorfismi di una superficie di Riemann compatta C di genere $g_C \geq 2$ è finito.
Il teorema di Hurwitz descrive la **limitazione di Hurwitz**, che dipende solamente dalle proprietà topologiche di C:

$$|\mathrm{Aut}(C)| \leq 84(g_C - 1)$$

Le curve che raggiungono questa limitazione, ovvero $|\mathrm{Aut}(C)| = 84(g_C - 1)$, si dicono **curve di Hurwitz** ed i loro gruppi di automorfismi **gruppi di Hurwitz**. Hurwitz dimostrò che un gruppo finito è un gruppo di Hurwitz se e solo se agisce con 3 sole orbite di ordine $\frac{|G|}{2}$, $\frac{|G|}{3}$ e $\frac{|G|}{7}$, ovvero se ha tre generatori a, b, c di ordine rispettivamente $2, 3, 7$, tali che $abc = 1$.
La curva di Hurwitz di genere più basso è nota come **quartica di Klein** ed è la curva piana proiettiva di genere 3:

$$x^3y + y^3z + z^3x = 0.$$

Teorema 4.1.1. *(Teorema di Hurwitz)*
Sia G un gruppo finito di automorfismi di una curva di genere $g_C \geq 2$. Sia $G = Aut(C)$. Allora

$$G \leq 84(g_C - 1).$$

Dimostrazione. Poniamo $C' = C/G$ e $p\colon C \longrightarrow C'$ la proiezione al quoziente. Siano $Q_1, \ldots, Q_k \in C'$ i valori critici di p e $e_1, \ldots, e_k$ i rispettivi indici di ramificazione. Definiamo $\delta_j := \frac{e_j - 1}{e_j}$ con $j = 1, \ldots, k$. Risulta che $\frac{1}{2} \leq \delta_j < 1$

per ogni j.
Riordinando i Q_j possiamo supporre

$$\delta_1 \leq \delta_2 \leq \ldots \leq \delta_k.$$

Detto $g_{C'}$ il genere di C' abbiamo, applicando la formula di Riemann-Hurwitz,

$$2g_C - 2 = |G| \left(2g_{C'} - 2 + \sum_{j=1}^{k} \delta_j \right).$$

Dall'ipotesi $g_C \geq 2$ segue che $\lambda = 2g_{C'} - 2 + \sum_{j=1}^{k} \delta_j > 0$.
Possiamo distinguere tre casi:

1. Se $g_{C'} \geq 2$, allora $\lambda \geq 2 \Rightarrow |G| \leq g_C - 1$.
2. Se $g_{C'} = 1$, allora $\lambda = \sum_{j=1}^{k} \delta_j$. Essendo $\lambda > 0$ necessariamente $s > 0$ e quindi $\delta \geq \frac{1}{2} \Rightarrow |G| \leq 4(g_C - 1)$.
3. Se $g_{C'} = 0$, allora $\lambda = -2 + \sum_{j=1}^{k} \delta_j > 0 \Rightarrow s \geq 3$.

- Se $k \geq 5$ allora $\lambda \geq \frac{1}{2} \Rightarrow |G| \leq 4(g_C - 1)$.
- Se $k = 4$ allora $\delta_4 \geq \frac{2}{3} \Rightarrow \sum_{j=1}^{k} \delta_j \geq \frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{13}{6}$. Da cui segue $|G| \leq 12(g_C - 1)$.
- Se $r = 3$:
  - Se $\delta_1 \geq \frac{3}{4}$ allora $\lambda \geq \frac{1}{4} \Rightarrow |G| \leq 8(g_C - 1)$.
  - Se $\delta_1 = \frac{2}{3}$ allora possiamo distinguere due sottocasi:
    $\delta_2 \geq \frac{3}{4}$. $\lambda \geq \frac{1}{6} \Rightarrow |G| \leq 12(g_C - 1)$.
    $\delta_2 = \frac{2}{3}$. Segue $\delta_3 \geq \frac{3}{4}$, $\lambda \geq \frac{1}{12} \Rightarrow |G| \leq 24(g_C - 1)$
  - Se $\delta_1 = \frac{1}{2}$ allora possiamo distinguere quattro sottocasi:
    $\delta_2 \geq \frac{4}{5}$. $\lambda \geq \frac{1}{10} \Rightarrow |G| \leq 20(g_C - 1)$.
    $\delta_2 = \frac{3}{4}$. Segue $\delta_3 \geq \frac{4}{5}$, $\lambda \geq \frac{1}{20} \Rightarrow |G| \leq 40(g_C - 1)$
    $\delta_2 = \frac{2}{3}$. Segue $\delta_3 \geq \frac{6}{7} \Rightarrow |G| \leq 84(g_C - 1)$
    Il caso $\delta_2 = \frac{1}{2}$ non può verificarsi poiché avremmo $\delta_3 > 1$.

□

Se G è un gruppo abeliano di automorfismi di una superficie di Riemann C di genere g_C Nakajima dimostrò in [15] che:

$$|G| \leq 4g_C + 4.$$

Dimostreremo questo risultato negli ultimi due capitoli e mostreremo per quali curve viene raggiunta la limitazione.
Se G è ciclico allora la limitazione diventa

$$|G| \leq 4g_C + 2.$$

In altre parole l'ordine di un elemento di $\mathrm{Aut}(C)$ non può superare $4g_C + 2$. Quest'ultima limitazione è stata dimostrata da Wiman nel 1895 in [18].

4.2 Il teorema d'esistenza di Riemann

Abbiamo dimostrato che, dato un gruppo di automorfismi $G \triangleleft \mathrm{Aut}(C)$ che agisce in modo olomorfo ed effettivo su una superficie di Riemann C, possiamo costruire una struttura complessa che rende lo spazio quoziente $C' := C/G$ una superficie di Riemann. Inoltre denotiamo con

$$p\colon C \longrightarrow C'$$

la proiezione naturale da C nel suo spazio quoziente e supponiamo che $Q_1, \ldots, Q_k \in C'$ siano i valori critici di p. (C, p) è un rivestimento ramificato di C'. Togliendo invece i valori critici allo spazio quoziente e la fibra dell'insieme dei valori critici alla superficie di Riemann C otteniamo un rivestimento

$$\overline{p}\colon C \setminus p^{-1}(\{Q_1, \ldots, Q_k\}) \longrightarrow C' \setminus \{Q_1, \ldots, Q_k\}\,.$$

Il nostro obiettivo è di invertire il problema: partiamo da una superficie di Riemann C', da k punti $Q_1, \ldots, Q_k$ di C' e da un rivestimento non ramificato

$$\overline{p}\colon C \longrightarrow C' \setminus \{Q_1, \ldots, Q_k\}\,.$$

Dimostreremo che il rivestimento non ramificato si può estendere ad un rivestimento ramificato $p\colon \widetilde{C} \longrightarrow C'$. Mostreremo inoltre che la superficie di Riemann $\widetilde{C} = C \cup p^{-1}(\{Q_1, \ldots, Q_k\})$ è univocamente determinata a meno di isomorfismi.

Definizione 37. Una mappa continua $f\colon C \longrightarrow C'$ tra due spazi topologici localmente compatti è detta **propria** se la preimmagine di ogni insieme compatto è compatto. È sempre così se C è compatto.

Proposizione 4.2.1. *Sia $f'\colon C \setminus A \longrightarrow C'$ un'applicazione olomorfa, dove C, C' sono superfici di Riemann e $A \subset C$ è finito.*
Se esiste un'applicazione continua $f\colon C \longrightarrow C'$ che estende f', allora f è olomorfa.

Dimostrazione. Sia $P \in A$ e siano $\varphi\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ e $\psi\colon V \longrightarrow \mathbb{C}$ carte locali in C e in C' rispettivamente, tali che $P \in U$ e $f(P) \in V$. La funzione

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \longrightarrow \mathbb{C}$$

è olomorfa in $\varphi(U \cap f^{-1}(V)) \setminus \{\varphi(P)\}$ e limitata in un intorno di $\varphi(P)$. Per un teorema dell'analisi complessa (vedi [9], *pagina 92, teorema 11.4*) è olomorfa anche in $\varphi(P)$. Ciò dimostra che f è olomorfa in P. $\square$

Consideriamo il disco aperto unitario $D = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$ e poniamo $D^* = D \setminus \{0\}$ (=disco bucato).
Il seguente teorema servirà per compiere la dimostrazione del teorema d'esistenza di Riemann

Teorema 4.2.2. *Sia C una superficie di Riemann e sia $q : C \longrightarrow D^*$ un rivestimento connesso di grado $m < +\infty$.*
Allora esiste una mappa biolomorfa $\psi\colon C \longrightarrow D^*$ tale che il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "q"'] & & D^* \arrow[dl, "p_m"] \\ & D^* & \end{tikzcd}$$

dove

$$\begin{array}{rcl} p_m\colon D^* & \longrightarrow & D^* \\ z & \longmapsto & z^m. \end{array}$$

Per la dimostrazione del teorema rimandiamo il lettore a [4], *a pagina 37, Teorema 5.10.*

Osserviamo poiché $\pi(D^*) \cong \mathbb{Z}$, q corrisponde al sottogruppo $m\mathbb{Z}$ di $\mathbb{Z}$. $p_m\colon D^* \longrightarrow D^*$ è il rivestimento di grado m corrispondente a questo sottogruppo.

Enunciamo e dimostriamo il teorema d'esistenza di Riemann.

Teorema 4.2.3. *(d'esistenza di Riemann)*
Sia C' una superficie di Riemann e sia $A \subset C'$ un insieme chiuso discreto. Supponiamo che C sia un'altra superficie di Riemann e

$$p'\colon C \longrightarrow C' \setminus A$$

un rivestimento proprio non ramificato.
Allora p' si può estendere ad un rivestimento ramificato di C', cioè esiste una superficie di Riemann $\widetilde{C}$, una mappa olomorfa e propria

$$p\colon \widetilde{C} \longrightarrow C'$$

ed una mappa biolomorfa[1]

$$\varphi\colon \widetilde{C} \setminus p^{-1}(A) \longrightarrow C,$$

[1] Un biolomorfismo fra due insiemi aperti di $\mathbb{C}^n$ è una funzione olomorfa, iniettiva, suriettiva con inversa olomorfa.

tale che commuti il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} C & \widetilde{C} \setminus p^{-1}(A) \arrow[l, hook', "\varphi"'] \arrow[r, hook] \arrow[d, phantom] & \widetilde{C} \arrow[d, "p"] \\ C' \setminus A \arrow[from=1-1, "p'"'] \arrow[rr, hook] & & C' \end{tikzcd}$$

La superficie $\widetilde{C}$ *è univocamente determinata a meno di isomorfismi.*

Dimostrazione. <u>*Esistenza:*</u>
Per ogni $Q \in A$ scegliamo una carta (U_Q, φ_Q) su C' centrata in Q, ovvero $\varphi_Q(Q) = 0$ e $U_Q \cap A = \{Q\}$; inoltre possiamo supporre che $\varphi_Q(U_Q)$ è il disco unitario in $\mathbb{C}$ e di avere scelto gli aperti U_Q sufficientemente piccoli da ottenere $U_Q \cap U_{Q'} = \emptyset$ per $Q \neq Q'$.
Sia $U_Q^* = U_Q \setminus \{Q\}$. Abbiamo supposto $p' \colon C \longrightarrow C' \setminus A$ propria, il che implica che $p'^{-1}(U_Q^*)$ ha un numero finito di componenti connesse $V_{i,Q}^*$, ovvero

$$p'^{-1}(U_Q^*) = V_{1,Q}^* \cup \ldots \cup V_{N,Q}^*,$$

dove ognuno dei $V_{i,Q}^* \longrightarrow U_Q^*$ è un rivestimento connesso, di grado finito m_i. Per il teorema precedente 4.2.2, per ogni $i = 1, \ldots, N$ possiamo trovare un biolomorfismo $\psi_i \colon V_{i,Q}^* \longrightarrow D^* = D \setminus \{0\}$, tale che il seguente diagramma di applicazioni olomorfe sia commutativo:

$$\begin{array}{ccc} V_{i,Q}^* & \xrightarrow{\psi_{i,Q}} & D^* \\ {\scriptstyle p'}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle p_{m_i}} \\ U_Q^* & \xrightarrow[\varphi_Q]{} & D^* \end{array}$$

con $p_{m_i}(z) = z^{m_i}$.

Aggiungiamo un punto $P_{i,Q}$ ad ogni $V_{i,Q}^*$; otteniamo insiemi $V_{i,Q} = V_{i,Q}^* \cup \{P_{i,Q}\}$ sui quali consideriamo la topologia che rende l'estensione naturale di $\psi_{i,Q}$ a una mappa $V_{i,Q} \longrightarrow D$ (mandando $P_{i,Q}$ in 0) un omeomorfismo. Definiamo dunque

$$\widetilde{C} = C \cup \{P_{i,Q} \colon Q \in A, i = 1, \ldots, N\}.$$

Su $\widetilde{C}$ esiste un'unica topologia, tale che l'inclusione $C \hookrightarrow C'$ è continua e $\forall W$ intorno di Q, allora

$$\{P_{i,Q}\} \cup \left(p'^{-1}(W) \cap V_i^*\right)$$

è un intorno di $P_{i,Q}$.
La topologia ottenuta è una topologia di Hausdorff.
Definiamo $p \colon \widetilde{C} \longrightarrow C'$ con $p(P) = p'(P)$ per ogni $P \in C$ e $p(P_{i,Q}) = Q$. Si

verifica facilmente che p è propria.
Abbiamo definito le carte locali

$$\psi_{m_i}\colon V_{i,Q} \longrightarrow D \text{ con } V_{i,Q} = V_{i,Q}^* \cup \{P_{i,Q}\},$$

dove ψ_{m_i} è l'estensione di $\psi\colon V_{i,Q}^* \longrightarrow D^*$ con $\psi_{m_i}(P_{iQ}) = 0$.
Le carte locali che abbiamo costruito sono compatibili con quelle di C e danno pertanto a $\widetilde{C}$ una struttura di superficie di Riemann.
Il rivestimento

$$p'\colon C \longrightarrow C' \setminus A$$

si estende ad un'applicazione continua

$$p\colon \widetilde{C} \longrightarrow C',$$

che è olomorfa per la proposizione 4.2.1.
Siccome $\widetilde{C} \setminus p^{-1}(A) = C$, possiamo scegliere come $\varphi\colon \widetilde{C} \setminus p^{-1}(A) \longrightarrow C$ la mappa identità.
Questo mostra l'esistenza di un'estensione del rivestimento $p'\colon C \to C' \setminus A$.

<u>*Unicità:*</u>
$\widetilde{C}$ è stata costruita in modo che, per ogni punto $Q \in A$, $p^{-1}(Q)$ consista di tanti punti quante sono le componenti connesse di $p^{-1}(U_Q^*)$.
Sia $p_1\colon \widetilde{C}_1 \longrightarrow C'$ soddisfacente le condizioni della proposizione. Allora $p^{-1}(U_Q^*) = p_1^{-1}(U_Q^*)$ e quindi, poichè p_1 è propria, $p_1^{-1}(Q)$ contiene almeno un punto per ogni componente connessa di $p^{-1}(U_Q^*)$.
$p_1^{-1}(Q)$ non contiene altri punti, perché se contenesse un punto aggiuntivo P sarebbe isolato e quindi $\widetilde{C}_1$ non potrebbe essere una superficie in un intorno di P.
Questo ci consente di estendere l'identità $Id\colon C \longrightarrow C$ ad un'applicazione biunivoca e continua $\psi\colon \widetilde{C} \longrightarrow \widetilde{C}_1$ mappando ogni punto $P_{i,Q}$ nell'unico punto, in $p^{-1}(U_Q^*)$, di accumulazione per $V_{i,Q}^*$; tale mappa è olomorfa per la proposizione 4.2.1 e quindi è un isomorfismo. □

4.3 Rivestimenti abeliani

Sia G un sottogruppo di automorfismi finito[2] che agisce su una superficie di Riemann C con proiezione naturale corrispondente:

$$p\colon C \longrightarrow C' := C/G. \tag{4.1}$$

Abbiamo visto che p è un rivestimento ramificato.

[2] L'ipotesi di gruppo finito non serve, se il genere della superficie di Riemann su cui agisce G è di genere ≥ 2. Perché in quel caso si ha che $\mathrm{Aut}(C)$ è finito e di conseguenza anche G è finito. Nei prossimi capitoli faremo agire G solo su superfici di Riemann C di $g_C \geq 2$.

Definizione 38. Un rivestimento (C, p) con p come in (4.1) si dice anche **di Galois** e viene indicato con (C, G).

Osserviamo che G è anche un gruppo di automorfismi del rivestimento

$$(\overline{C}, \overline{p}) := \big(C \setminus p^{-1}(\{Q_1, \dots, Q_k\}), \overline{p}\big)$$

di $\overline{C}' := C' \setminus \{Q_1, \dots, Q_k\}$, con

$$\overline{p} \colon \overline{C} \longrightarrow \overline{C}',$$

definito da $\overline{p} := p\big|_{C \setminus p^{-1}(\{Q_1, \dots, Q_k\})}$.
Fissati i punti $\widetilde{x}_0 \in \overline{C}$ e $x_0 \in \overline{C}'$. Il rivestimento $(\overline{C}, \overline{p})$ induce un monomorfismo

$$\overline{p}_* \colon \pi(\overline{C}, \widetilde{x}_0) \longrightarrow \pi(\overline{C}', x_0).$$

Definiamo $H := \overline{p}_*(\pi(\overline{C}, \widetilde{x}_0)) < \pi(\overline{C}', x_0)$. Verifichiamo che H è normale in $\pi(\overline{C}', x_0)$ e che quindi il rivestimento $(\overline{C}, \overline{p})$ è regolare.

$$\begin{aligned}
|G| \leq |\mathrm{Aut}(\overline{C}, \overline{p})| &= |N(H)/H| = [N(H) : H] = \frac{\Big[\pi(\overline{C}', x_0) : H\Big]}{\Big[\pi(\overline{C}', x_0) : N(H)\Big]} \\
&= \frac{\deg(\overline{p})}{\Big[\pi(\overline{C}', x_0) : N(H)\Big]} = \frac{|G|}{\Big[\pi(\overline{C}', x_0) : N(H)\Big]}.
\end{aligned}$$

Allora si ha che

$$\Big[\pi(\overline{C}', x_0) : N(H)\Big] = 1 \Longrightarrow N(H) = \pi(\overline{C}', x_0)$$

(e inoltre $G = \mathrm{Aut}(\overline{C}, \overline{p})$);
questo vuol dire che H è normale in $\pi(\overline{C}', x_0)$ e che quindi il rivestimento $(\overline{C}, \overline{p})$ è regolare. Inoltre segue che

$$|G| = \left| \frac{\pi(\overline{C}', x_0)}{\overline{p}_*(\pi(\overline{C}, \widetilde{x}_0))} \right|.$$

Riassumiamo i risultati ottenuti.
Per costruire un rivestimento di Galois (C, G) servono

1. una superficie di Riemann C'
2. i valori critici $Q_1, \dots, Q_k \in C'$
3. $H \lhd \pi(\overline{C}', x_0)$, dove $\overline{C}' = C' \setminus \{Q_1, \dots, Q_k\}$

tali che

$$\frac{\pi(\overline{C}', x_0)}{H} \cong G. \tag{4.2}$$

Basta inoltre costruire il rivestimento regolare $(\overline{C}, \overline{p})$ di $\overline{C}'$ indotto da H (teorema 2.11.2, teorema d'esistenza di rivestimenti) e poi chiuderlo ad un medesimo rivestimento (C, p) per il teorema d'esistenza di Riemann.

$$\mathrm{Aut}(C, p) \cong \mathrm{Aut}(\overline{C}, \overline{p}) \cong G,$$

chiamato $C' = C/G$, p è la proiezione al quoziente.
L'isomorfismo 4.2 equivale a dire che esiste un omomorfismo suriettivo

$$\psi\colon \pi(\overline{C}', x_0) \longrightarrow G$$

con nucleo di ψ esattamente H, cioè $\ker(\psi) = H$.

Supponiamo che G sia abeliano finito e studiamo le mappe

$$\psi \in \mathrm{Hom}(\pi(\overline{C}', x_0), G).$$

Introduciamo prima la definizione di rivestimento abeliano:

Definizione 39. Un **rivestimento abeliano finito** della superficie di Riemann C' è un rivestimento di Galois $p\colon C \to C' = C/G$ con G abeliano finito.

Proposizione 4.3.1. *Per ogni coppia $g, h \in \pi(\overline{C}', x_0)$ e per ogni $\psi \in$ Hom$(\pi(\overline{C}', x_0), G)$ con G abeliano, si ha che $ghg^{-1}h^{-1} \in \ker\psi$.*

Dimostrazione. Utilizzando la proprietà di omomorfismo e di abelianità di ψ otteniamo:

$$\begin{aligned}\psi(ghg^{-1}h^{-1}) &= \psi(g)\psi(h)\psi(g^{-1})\psi(h^{-1}) \\ &= \psi(g)\psi(h)\psi(g)^{-1}\psi(h)^{-1} \\ &= \psi(g)\psi(g)^{-1}\psi(h)\psi(h)^{-1} \\ &= 1.\end{aligned}$$

□

Definizione 40. Definiamo il **commutatore**

$$\Pi = \left[\pi(\overline{C}', x_0), \pi(\overline{C}', x_0)\right] = \langle ghg^{-1}h^{-1} | g, h \in \pi(\overline{C}', x_0)\rangle.$$

Proposizione 4.3.2. $\Pi \triangleleft \pi(\overline{C}', x_0)$*, ovvero per ogni $x \in \pi(\overline{C}', x_0)$ e per ogni $y = ghg^{-1}h^{-1}$ con $g, h \in \pi(\overline{C}', x_0)$ segue che $xyx^{-1} \in \Pi$.*

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
xyx^{-1} &= xghg^{-1}h^{-1}x^{-1} \\
&= xgx^{-1}xhx^{-1}xg^{-1}x^{-1}xh^{-1}x^{-1} \\
&= (xgx^{-1})(xhx^{-1})(xgx^{-1})^{-1}(xhx^{-1})^{-1} \\
&= y_1y_2y_1^{-1}y_2^{-1} \in \Pi.
\end{aligned}$$

□

Osserviamo inoltre che il nucleo di un omomorfismo è sempre normale, quindi, se G è abeliano per ogni $\psi \in \mathrm{Hom}(\pi(\overline{C}', x_0), G)$ vale $\Pi \triangleleft \ker(\psi)$.

Proposizione 4.3.3. *Sia G un gruppo, $\psi \in Hom(\pi(\overline{C}', x_0), G)$. Sia* Π *un sottogruppo di* $\ker(\psi)$. *Segue che esiste un omomorfismo ψ' che fa commutare il diagramma*

$$\begin{tikzcd}
\pi(\overline{C}', x_0) \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "proj"'] & & G \\
& \frac{\pi(\overline{C}', x_0)}{\Pi} \arrow[ur, "\psi'"'] &
\end{tikzcd}$$

Dimostrazione. Prendiamo $g \in \pi(\overline{C}', x_0)$ e definiamo $\psi'([g]) = \psi(g)$.
Verifichiamo che si tratta di una buona definizione:
Supponiamo $g \neq g'$ con $[g] = [g'] \in \frac{\pi(\overline{C}', x_0)}{\Pi}$.
Per definizione di gruppo quoziente $[g] = [g'] \iff g^{-1}g' \in \Pi < \ker(\psi)$.
Allora

$$\psi(g') = \psi(g(g^{-1}g')) = \psi(g)\psi(g^{-1}g') = \psi(g).$$

L'ultimo passo $\psi(g^{-1}g') = 1$ segue dal fatto che $g^{-1}g' \in \Pi < \ker(\psi)$. È immediato verificare che ψ' è un omomorfismo. □

Quindi, se G è abeliano, ad ogni omomorfismo $\psi\colon \pi(\overline{C}', x_0) \longrightarrow G$ associamo un omomorfismo $\psi'\colon \frac{\pi(\overline{C}', x_0)}{\Pi} \longrightarrow G$.
Vuol dire che esiste il seguente omomorfismo

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}(\pi(\overline{C}', x_0), G) &\longrightarrow \mathrm{Hom}\left(\frac{\pi(\overline{C}', x_0)}{\Pi}, G\right) \\
\psi &\longmapsto \psi'
\end{aligned}$$

invertibile con inversa

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}\left(\frac{\pi(\overline{C}', x_0)}{\Pi}, G\right) &\longrightarrow \mathrm{Hom}(\pi(\overline{C}', x_0), G) \\
\psi' &\longmapsto \psi' \circ \mathrm{proj}.
\end{aligned}$$

La bigezione tra gli oggetti geometrici e oggetti algebrici trovata in precedenza

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Rivestimenti di Galois}\\ (C,G)\\ C \text{ superficie di Riemann}\\ G \text{ finito,}\\ G < \mathrm{Aut}(C)\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c}G \text{ gruppo finito}\\ C' \text{ superficie di Riemann}\\ Q_1,\dots,Q_k \in C'\\ \psi\colon \pi(\overline{C}',x_0) \longrightarrow G\\ \text{omomorfismo suriettivo}\end{array}\right\}$$

induce, nel caso G abeliano, una bigezione

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Rivestimenti di Galois}\\ (C,G)\\ C \text{ superficie di Riemann}\\ G \text{ abeliano finito,}\\ G < \mathrm{Aut}(C)\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c}G \text{ gruppo finito, abeliano}\\ C' \text{ superficie di Riemann}\\ Q_1,\dots,Q_k \in C'\\ \psi'\colon H_1(\overline{C}') \longrightarrow G\\ \text{omomorfismo suriettivo.}\end{array}\right\}$$

dove $H_1(\overline{C}') := \frac{\pi(\overline{C}',x_0)}{\Pi}$ viene detto **abelianizzato**[3] di $\pi(\overline{C}',x_0)$, e ψ' è la mappa indotta da ψ come nella proposizione 4.3.3.
Osserviamo che $H_1(\overline{C}')$ è abeliano. Notiamo che la mappa ψ' è determinata, a meno di automorfismi di G, dal sottogruppo $H = \ker\psi'$.

Si trova dunque seguente bigezione tra l'insieme dei rivestimenti di Galois ed i sottogruppi normali H:

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Rivestimenti di Galois}\\ (C,G)\\ C \text{ superficie di Riemann}\\ G \text{ abeliano finito,}\\ G < \mathrm{Aut}(C)\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c}G \text{ gruppo finito, abeliano}\\ C' \text{ superficie di Riemann}\\ Q_1,\dots,Q_k \in C'\\ H < H_1(\overline{C}'),\ \text{tale che}\\ H_1(\overline{C}')/H \cong G\end{array}\right\}$$

Osservazione 3. Dato un rivestimento ramificato $p\colon C \longrightarrow C/G$ con $\overline{p}$ rivestimento associato, sia Q_i uno dei valori critici e preso un laccio intorno a Q_i con punto base $x_0 \in C/G$: $\gamma_i \in \pi(C' \setminus \{Q_1,\dots,Q_k\}, x_0)$.
Allora l'indice di ramificazione di Q_i (ovvero la molteplicità di p nei punti P_j della fibra di Q_i) è

$$e_i = \mathrm{mult}_{P_j}(p) = \min\left\{\lambda \in \mathbb{N}_{>0} \middle| \gamma_i^\lambda \in \overline{p}_*(\pi(C \setminus p^{-1}(\{Q_1,\dots,Q_k\})))\right\}.$$

Possiamo aggiungere quest'ultima condizione alla bigezione trovata; riassumiamo i risultati trovati nel seguente teorema:

[3]Per una definizione più generale dell'abelianizzato: vedere definizione 42.

Teorema 4.3.4. *Per ogni gruppo abeliano finito G, $\forall k \in \mathbb{N}, \forall e_1, \dots, e_k \in \mathbb{N}$ con $e_i \geq 2$, esiste una bigezione*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{Rivestimenti di Galois} \\ (C,G) \\ C \textit{ superficie di Riemann} \\ G < Aut(C) \\ \textit{con } k \textit{ valori di ramificazione} \\ \textit{e indici di ramificazione} \\ e_1, \dots, e_k. \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} C' \textit{ superficie di Riemann} \\ Q_1, \dots, Q_k \in C' \\ H \triangleleft H_1(\overline{C}'), \textit{ tale che} \\ 1.) H_1(\overline{C}')/H \cong G \\ 2.) \forall i \quad \gamma_i^{e_i} \in H \textit{ e inoltre} \\ \quad \forall 0 < \lambda < e_i \quad \gamma_i^{\lambda} \notin H \end{array} \right\}$$

Andiamo a calcolare esplicitamente, usando il teorema di Seifert-Van Kampen, l'abelianizzato $H_1(\overline{C}') = H_1(C' \setminus \{Q_1, \dots, Q_k\})$, dove C' è una superficie di Riemann arbitraria.

4.4 Teorema di Seifert-Van Kampen

Definizione 41. Consideriamo un insieme $S = \{x_1, \dots, x_n\}$, il gruppo libero[4] $\langle S \rangle$ e un sottoinsieme $R \subseteq \langle S \rangle$ formato da elementi di S. Il **gruppo di presentazione** $\langle S \mid R \rangle$ è definito come il più grande gruppo quoziente di $\langle S \rangle$ tale che ogni elemento di R è identificato con l'identità. Gli elementi di S sono detti **generatori** di $\langle S \mid R \rangle$, gli elementi di R sono detti **relatori**. Diciamo che due elementi di $\langle S \rangle$ sono **R-equivalenti** se si ottengono uno dall'altro mediante un numero finito di operazioni del tipo

(i) Inserire o cancellare xx^{-1} o $x^{-1}x$ con $x \in S$

(ii) Inserire o cancellare r o r^{-1} con $r \in R$.

Definizione 42. Dato un gruppo con presentazione $G = \langle S \mid R \rangle$, il suo **abelianizzato** $Ab(G)$ è il gruppo con presentazione

$$Ab(G) = \langle S \mid R \cup \{xyx^{-1}y^{-1} \mid x, y \in S\} \rangle.$$

Sia X uno spazio topologico, U_1 e U_2 due suoi aperti non vuoti e connessi per archi, tali che $X = U_1 \cup U_2$ e $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ connesso per archi. Sia x_0 un punto di $U_1 \cap U_2$. Le inclusioni danno luogo ai seguenti diagrammi commutativi:

[4] Il gruppo $\langle S \rangle$ si dice libero se è possibile scrivere ogni elemento di $\langle S \rangle$ come prodotto di un numero finito di elementi di S e dei suoi inversi in modo unico.

$$
\begin{tikzcd}
 & U_1 \arrow[dr, "j_1"] & \\
U_1 \cap U_2 \arrow[ur, "i_1"] \arrow[dr, "i_2"'] & & X \\
 & U_2 \arrow[ur, "j_2"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \pi(U_1, x_0) \arrow[dr, "j_{1*}"] & \\
\pi(U_1 \cap U_2, x_0) \arrow[ur, "i_{1*}"] \arrow[dr, "i_{2*}"'] & & \pi(X, x_0) \\
 & \pi(U_2, x_0). \arrow[ur, "j_{2*}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Teorema 4.4.1. *(Seifert-Van Kampen)*
Sia X uno spazio topologico, U_1 e U_2 due suoi aperti non vuoti e connessi per archi, tale che $X = U_1 \cup U_2$ e $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ sia connesso per archi. Siano

$$
\begin{aligned}
\pi(U_1, x_0) &= \langle S_1 \mid R_1 \rangle \\
\pi(U_2, x_0) &= \langle S_2 \mid R_2 \rangle \\
\pi(U_1 \cap U_2, x_0) &= \langle S \mid R \rangle
\end{aligned}
$$

e sia $R_S = \left\{ "i_{1*}s"("i_{2*}s")^{-1} \mid s \in S \right\}$.
Allora

$$\pi(X, x_0) \cong \langle S_1 \cup S_2 \mid R_1 \cup R_2 \cup R_S \rangle.$$

4.4.1 Calcolo dell'abelianizzato del gruppo fondamentale di $\overline{C}'$

Sia C' una superficie di Riemann arbitraria.
Vogliamo calcolare prima $\pi_1(C' \setminus \{Q_1, \ldots, Q_k\}, x_0)$ e poi $H_1(C' \setminus \{Q_1, \ldots, Q_k\})$, con $x_0 \in C' \setminus \{Q_1, \ldots, Q_k\}$.

1. $C' = S^2$
   Sia X una varietà $S^2 \setminus \{Q_1, \ldots, Q_k\}$ e $x_0 \in X$.
   Notiamo innanzitutto che $S^2 \setminus \{Q_k\}$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^2$ e X è omeomorfo a $\mathbb{R}^2 \setminus \{Q_1, \ldots, Q_{k-1}\}$.
   Un retratto forte di deformazione di esso è costituito dai $k-1$ lacci che girano attorno ai $k-1$ punti, ovvero possiamo considerare i $k-1$ cammini γ_i uscenti da x_0 che girano attorno a ciascun punto Q_i, $\forall i \in \{1, \ldots, k-1\}$.
   Otteniamo così un bouquet di $k-1$ circonferenze.

   Quindi

   $$\pi(X, x_0) = \pi(\underbrace{S^1 \vee S^1 \ldots \vee S^1}_{k-1 \text{ volte}}, x_0) =< \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{k-1} \mid \emptyset >\cong \underbrace{\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \ldots * \mathbb{Z}}_{k-1 \text{ volte}}$$

   Quindi l'abelianizzato di $\pi(X, x_0)$ è

   $$H_1(X) = Ab(\pi(X, x_0)) \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}}_{k-1 \text{ volte}} = \mathbb{Z}^{\oplus k-1}.$$

2. $C' = T_1$, ovvero un g- toro T_g di genere $g = 1$:
Prendiamo la rappresentazione piana del toro (quadrato con i bordi $aba^{-1}b^{-1}$ e vertici Q) e applichiamo il teorema di Seifert van Kampen per calcolare il gruppo fondamentale della varietà $X = T_1 \setminus \{Q_1, \ldots, Q_k\}$, con $x_0 \in X$: $\pi(X, x_0)$. Sia δ un cammino che congiunge il punto Q con x_0.
I k punti Q_i si trovano all'interno del quadrato.

   - Sia $U_1 = T_1 \setminus D$, dove D è un disco chiuso contenuto in T_1, che contiene i punti Q_i, $\forall i = 1 \ldots k-1$, ma non il punto x_0.
   U_1 ha come retratto forte di deformazione il bordo di T_1: $S^1 \vee S^1$.
   Abbiamo dunque gli isomorfismi

$$\begin{array}{ccccc} \pi(S^1 \vee S^1, Q) & \xrightarrow{i_*} & \pi(U_1, Q) & \xrightarrow{u_\delta} & \pi(U_1, x_0) \\ \\ [c] & \longrightarrow & [i_* c] & \longrightarrow & [\overline{\delta} i_* c \delta] = [\gamma] \end{array}$$

   Sappiamo che $\pi(\partial T_1, Q) = \langle a, b \mid \emptyset \rangle$ e per l'isomorfismo precedente possiamo scrivere $\alpha = \overline{\delta} i_* a \delta$ e $\beta = \overline{\delta} i_* b \delta$. Questo ci permette di scrivere

$$\pi(U_1, x_0) = \langle \alpha, \beta \mid \emptyset \rangle.$$

   - Sia U_2 un aperto $T_1 \setminus \left\{ aba^{-1}b^{-1} \right\}$ che contiene i punti x_0 e Q_i, $\forall i = 1 \ldots k-1$.
   L'aperto U_2 è omeomorfo a $\mathbb{R}^2 \setminus \{Q_1, \ldots, Q_k\}$. Allora il gruppo fondamentale di U_2 è

$$\pi(U_2, x_0) = \pi(\underbrace{S^1 \vee S^1 \ldots \vee S^1}_{k \text{ volte}}, x_0) =< \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k \mid \emptyset >,$$

   dove γ_i sono dei cappi di punto base x_0 che girano intorno ai k punti Q_i e generano il gruppo fondamentale $\pi(U_2, x_0)$.

   - L'intersezione $U_1 \cap U_2$ ha una circonferenza γ passante per x_0 come retratto forte di deformazione

$$\pi(U_1 \cap U_2) = \langle \gamma \mid \emptyset \rangle \cong \mathbb{Z}.$$

Vediamo ora di costruire l'insieme $R_S = \left\{ "i_{1*}\gamma" ("i_{2*}\gamma")^{-1} \right\}$. Dobbiamo considerare la classe delle immagini di γ in $\pi(U_1, x_0)$ e di γ in $\pi(U_2, x_0)$ e scriverla utilizzando i generatori di tale gruppo. Quindi γ è omotopicamente equivalente a $\overline{\delta} aba^{-1}b^{-1}\delta$, dunque $\gamma \sim \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$.

In U_1 invece γ è omotopicamente equivalente a $\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_k$.
Quindi

$$R_S = \left\{\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = \gamma_1\gamma_2\dots\gamma_k\right\}.$$

Per il teorema di Seifert-Van Kampen abbiamo il gruppo fondamentale del toro meno gli k punti:

$$\begin{aligned}\pi(X,x_0) &\cong \langle\alpha,\beta,\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_k \mid \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = \gamma_1\gamma_2\dots\gamma_k\rangle\\ &\cong (\mathbb{Z}^{*(2+k)})/(\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = \gamma_1\gamma_2\dots\gamma_k).\end{aligned}$$

Siccome possiamo esprimere un cammino γ_i, scegliamo γ_k, tramite composizione degli altri cammini

$$\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1}\dots\gamma_{k-1}^{-1} = \gamma_k,$$

il gruppo fondamentale diviene

$$\begin{aligned}\pi(X,x_0) &\cong \langle\alpha,\beta,\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_k \mid \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1}\dots\gamma_{k-1}^{-1} = \gamma_k\rangle\\ &\cong \mathbb{Z}^{*(2+k-1)}\\ &= \mathbb{Z}^{*(k+1)}.\end{aligned}$$

Ora possiamo calcolare l'abelianizzato di $\pi(X,x_0)$, ovvero $H_1(X)$:

$$\begin{aligned}H_1(X) &= Ab(\pi(X,x_0))\\ &= \mathbb{Z}^{*(k+1)}/\langle\alpha,\beta,\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_k \mid \prod_{i=1}^{k}\gamma_i = 1\rangle\\ &= \mathbb{Z}^{\oplus(k+1)}.\end{aligned}$$

3. $C' = T_g$
   Possiamo generalizzare il risultato per una superficie di Riemann $X = T_g \setminus \{Q_1,\dots,Q_k\}$ di genere $g \geq 2$:

$$\begin{aligned}\pi(X,x_0) &\cong (\mathbb{Z}^{*(2g+k)})/(\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\dots\alpha_g\beta_g\alpha_g^{-1}\beta_g^{-1} = \gamma_1\gamma_2\dots\gamma_k)\\ &= \mathbb{Z}^{*(2g+k-1)}.\end{aligned}$$

L'abelianizzato: $H_1(X) = \mathbb{Z}^{\oplus 2g} \oplus \mathbb{Z}^{\oplus k-1} = \mathbb{Z}^{\oplus 2g+k-1}$

Capitolo 5

Gruppi abeliani *quasi large* di automorfismi

5.1 Gruppi abeliani di automorfismi

Lemma 5.1.1. *Sia C una superficie di Riemann di genere $g_C \geq 2$, G un gruppo abeliano di automorfismi di C e $C' = C/G$. Allora l'insieme dei valori critici di $p\colon C \to C'$ non ha cardinalità 1.*

Dimostrazione. Supponiamo che su C' esista un unico valore critico Q con indice di ramificazione $e \geq 2$ e dimostriamo che non esiste alcuna superficie di Riemann che sia rivestimento abeliano di C'. Sia $g_{C'}$ il genere di C'. Abbiamo calcolato

$$H_1(T_{g_{C'}} \setminus \{Q\}) = \mathbb{Z}^{\oplus 2g_{C'}}.$$

Supponiamo G gruppo abeliano dato. Per il teorema 4.3.4 abbiamo $H \triangleleft H_1(T_{g_{C'}} \setminus \{Q\})$, tale che

- $H_1/H \cong G$
- preso un cammino $\gamma \in H_1(T_{g_{C'}} \setminus \{Q\})$ che gira intorno a Q, allora
  - la relazione $\prod \gamma_i = 1$ si riduce a $\gamma = 1$,
  - il teorema 4.3.4 ci dice che

    $$\forall 0 < \lambda < e \text{ si ha } \gamma^\lambda \notin H.$$

    È assurdo perché $e \geq 2$ e $H \ni 1$.

□

Dato un punto $Q \in Y$ scegliamo un punto $P \in p^{-1}(Q)$ e indichiamo con H_Q lo stabilizzatore di P:

$$H_Q = \{\sigma \in G \mid \sigma \cdot P = P\}.$$

Siccome G è abeliano H_Q *non dipende dalla scelta del punto* P ed è quindi ben definito.

Teorema 5.1.2. *Dato* $p\colon C \longrightarrow C'$ *rivestimento abeliano finito con gruppo* G *e siano* $T_1, \dots, T_k \in C'$*, con* $k > 0$*, i valori critici di* p*.*
Per ogni $j_0 \in \{1, \dots, k\}$ *definiamo*

$$n_{j_0} = \prod_{j \neq j_0} e_{T_j}$$

dove $e_Q = |H_Q|$ *è l'indice di ramificazione di* Q*.*
Se $g(C') = 0$ *allora* n_{j_0} *è un multiplo di* $|G|$*.*

Dimostrazione. Il rivestimento abeliano $p\colon C \longrightarrow C'$ induce una mappa suriettiva

$$\begin{aligned} \psi\colon H_1(\overline{C}') &\longrightarrow G \\ \gamma_i &\longrightarrow g_i. \end{aligned}$$

con $i = 1, \dots, k$. ψ produce k elementi $g_1, \dots, g_k \in G$, tali che

$$\sum g_i = 0 \qquad \text{e} \qquad \operatorname{ord}(g_i) = e_{T_i}.$$

Fissiamo l'indice j_0 e togliamo l'elemento g_{j_0}.
Consideriamo il gruppo $\mathbb{Z}_{e_{T_1}} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{e_{T_{j_0-1}}} \times \mathbb{Z}_{e_{T_{j_0+1}}} \times \ldots \mathbb{Z}_{e_{T_k}}$ e consideriamo l'omomorfismo Ψ tale che

$$\begin{aligned} \Psi\colon \quad \mathbb{Z}_{e_{T_1}} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{e_{T_{j_0-1}}} \times \mathbb{Z}_{e_{T_{j_0+1}}} \times \ldots \mathbb{Z}_{e_{T_k}} &\longrightarrow G \\ (1, 0, \dots, 0) &\longmapsto g_1 \\ (0, 1, 0, \dots, 0) &\longmapsto g_2 \\ \ldots & \\ (0, \dots, 0, 1) &\longmapsto g_k \end{aligned}$$

Se un tale omomorfismo esiste, è unico, in quanto abbiamo determinato l'immagine di un insieme di generatori.
Inoltre Ψ esiste in quanto ambedue i gruppi sono abeliani e $e_{T_i} g_i = 0$, $\forall i \in \{1, \dots, j_0 - 1, j_0 + 1, \dots k\}$.
Osserviamo che

$$\operatorname{Im}\Psi = \langle g_i \rangle = G,$$

siccome ψ è suriettiva, $\sum g_i = 0$, e per l'ipotesi $g_{C'} = 0$ si ha $H_1(\overline{C}') = \langle \gamma_i \rangle$.
Da questo segue che Ψ è un omomorfismo suriettivo.
Possiamo concludere dicendo che se Ψ è suriettivo, allora

$$\begin{aligned} \operatorname{ord}(G) &= \frac{\operatorname{ord}(\mathbb{Z}_{e_{T_1}} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{e_{T_{j_0-1}}} \times \mathbb{Z}_{e_{T_{j_0+1}}} \times \ldots \mathbb{Z}_{e_{T_k}})}{\operatorname{ord}(\ker(\Psi))} \\ &= \frac{n_{j_0}}{\operatorname{ord}(\ker(\Psi))}. \end{aligned}$$

□

Enunciamo inoltre il teorema di classificazione dei gruppi abeliani finiti, perché ci servirà per dimostrare il teorema 5.5.3.

Teorema 5.1.3. *Ogni gruppo abeliano finito $G \neq \{e\}$ è prodotto diretto*

$$G \cong \mathbb{Z}_{d_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{d_n}$$

con la proprietà $d_i \big| d_{i+1}$.
Il prodotto diretto è unico, nel senso che se

$$G \cong \mathbb{Z}_{c_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{c_m}$$

con la proprietà $c_i \big| c_{i+1}$, segue che $n = m$ e $d_i = c_i$.

Per una dimostrazione completa rimandiamo il lettore a [6], *a pagina 119, Teorema 10.9.* Osserviamo che l'ordine massimo di un elemento di G è d_n e ogni elemento ha ordine un divisore di d_n. In particolare $\text{lcm}(e_i)\big|d_n$.

5.2 Gruppi *large* di automorfismi

Definizione 43. Data C superficie di Riemann di genere $g_C \geq 2$ e G sottogruppo di $Aut(C)$ diremo che G è un **gruppo large** se $\mid G \mid> 4(g_C - 1)$.

Teorema 5.2.1. *Sia C superficie di Riemann di genere $g_C \geq 2$, G gruppo large di automorfismi di C e $C' = C/G$.*
Allora $g_{C'} = 0$ e la proiezione $p\colon C \longrightarrow C'$ può avere solo 4 o 3 valori critici.
Per gli indici di ramificazione possono verificarsi al più seguenti possibilità:

(I) <u>*Quattro valori critici:*</u>

- *(a) Una famiglia infinita: $\{2, 2, 2, n\}$, $3 \leq n$*
- *(b) Tre casi eccezionali: $\{2, 2, 3, a\}$, $3 \leq a \leq 5$*

(II) Tre valori critici

- *(a) Una famiglia doppiamente infinita: $\{2, m, n\}$, $3 \leq m \leq n$. Se $m = 3$ allora $n \geq 7$, e se $m = 4$ allora $n \geq 5$.*
- *(b) Cinque famiglie singolarmente infinite:*
  - *(i) $\{3, a, n\}$, $3 \leq a \leq 6$, $a \leq n$; se $a = 3$ allora e $n \geq 4$*
  - *(ii) $\{4, 4, n\}$, $4 \leq n$*
- *(c) Casi eccezionali:*
  - *(i) $\{3, 7, a\}$, $7 \leq a \leq 41$*
  - *(ii) $\{3, 8, a\}$, $8 \leq a \leq 23$*
  - *(iii) $\{3, 9, a\}$, $9 \leq a \leq 17$*

(iv) $\{3, 10, a\}$, $10 \leq a \leq 14$
(v) $\{3, 11, a\}$, $11 \leq a \leq 13$
(vi) $\{4, 5, a\}$, $5 \leq a \leq 19$
(vii) $\{4, 6, a\}$, $6 \leq a \leq 11$
(viii) $\{4, 7, a\}$, $7 \leq a \leq 9$
(ix) $\{5, 5, a\}$, $5 \leq a \leq 9$
(x) $\{5, 6, a\}$, $6 \leq a \leq 7$

Dimostrazione. (Dimostrazione tratta da [3].) Usiamo la formula di Riemann-Hurwitz

$$2g_C - 2 =\mid G \mid \left\{ 2g_{C'} - 2 + \sum_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{e_j}\right) \right\}.$$

Definiamo

$$\lambda := 2g_{C'} - 2 + \sum_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{e_j}\right).$$

Imponendo la condizione di G large, ovvero $\mid G \mid > 4(g_C - 1)$ considerando che $g_C \geq 2$ otteniamo:

$$\begin{aligned} 2(g_C - 1) &= \mid G \mid \lambda \\ &> 4\lambda(g_C - 1) \\ \Rightarrow \frac{1}{2} &> \lambda \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned} 2g_{C'} - 2 + \sum_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{e_j}\right) &< \frac{1}{2} \\ g_{C'} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{e_j}\right) &< \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Da cui segue $g_{C'} \leq 1$.
Se $g_{C'} = 1$ avremmo

$$\lambda = \sum_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{e_j}\right).$$

Siccome per ipotesi abbiamo $g_C \geq 2$, dalla formula di Riemann-Hurwitz segue che $\lambda > 0$ e quindi $k \geq 1$, ma $e_j \geq 2$ e dunque si avrebbe $\lambda \geq \frac{1}{2}$.

Possiamo concludere $g_{C'} = 0$ e

$$0 < \lambda = -2 + \sum_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{e_j}\right) < \frac{1}{2}$$

Da $\lambda < \frac{1}{2}$ segue $k \leq 4$,
mentre da $0 < \lambda$ segue $3 \leq k$, quindi $k = 3$ oppure $k = 4$.

(I) Caso dei quattro valori critici $k = 4$:
cerchiamo i valori e_j per cui

$$\lambda = 2 - \frac{1}{e_1} - \frac{1}{e_2} - \frac{1}{e_3} - \frac{1}{e_4} < \frac{1}{2}$$

Poniamo $e_1 \leq e_2 \leq e_3 \leq e_4$.
Se $e_1 \geq 3$ allora $\lambda \geq 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$, quindi $e_1 = 2$.
Se $e_2 \geq 3$ allora $\lambda \geq \frac{2}{3} - \frac{3}{3}$, quindi $e_2 = 2$. Vediamo dunque per quali valori di e_3 ed e_4 si ha

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{e_3} + \frac{1}{e_4} < 1.$$

Se $e_3 = 2$, qualsiasi valore di e_4 soddisfa la disuguaglianza precedente eccetto $e_4 = 2$.
Se $e_3 = 3$ allora $3 \leq e_4 \leq 5$.

(II) Caso dei tre valori critici $k = 3$:
cerchiamo valori di e_j per cui

$$\begin{aligned} \lambda = 1 - \frac{1}{e_1} - \frac{1}{e_2} - \frac{1}{e_3} \quad &< \quad \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \quad &< \quad \frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} + \frac{1}{e_3}. \end{aligned}$$

Poniamo $e_1 \leq e_2 \leq e_3$.
Se $e_1 \geq 6$ allora $\lambda \geq \frac{1}{2}$, quindi $2 \leq e_2 \leq 6$.
Se $e_1 = 2$ tutti i valori di e_2 ed e_3 soddisfano la disuguaglianza $\lambda < \frac{1}{2}$, imponendo la condizione $\lambda > 0$ si ottiene la famiglia infinita descritta in *(II)* sottocaso *(a)*.
Se $e_1 = 3$ allora deve essere $\frac{1}{e_2} + \frac{1}{e_3} > \frac{1}{6}$. Se $3 \leq e_2 \leq 6$ allora la disuguaglianza è sempre soddisfatta e imponendo $\lambda > 0$ si ottengono le quattro famiglie infinite del sottocaso *(b)*.
Se $e_2 \geq 12$ la disuguaglianza $\frac{1}{e_2} + \frac{1}{e_3} > \frac{1}{6}$ non è soddisfatta.
Se $7 \leq e_2 \leq 11$ otteniamo le prime cinque famiglie eccezionali del sottocaso *(c)*.
Allo stesso modo se $e_1 = 4$ otteniamo la famiglia infinita del sottocaso *(b)* e le famiglie eccezionali *(v)*, *(vii)* e *(viii)* del sottocaso *(c)*.
Infine ponendo $n_1 = 5$ troviamo le famiglie eccezionali *(ix)* e *(x)* del sottocaso *(c)*.

□

Rimandiamo la dimostrazione del seguente teorema a [10] (pag. 37-41).

Teorema 5.2.2. *Sia G un gruppo abeliano e large di automorfismi di una superficie di Riemann.*
Riassumiamo i casi di indici di ramificazione per cui esiste una superficie di Riemann C che sia un rivestimento abeliano di $\mathbb{P}^1$ nella tabella seguente, dove di seguito leggiamo il gruppo di automorfismi, gli indici di ramificazione ed il genere di C:

	Gruppo abeliano	Indici di ramificazione	Genere di C: g
		Quattro valori critici	
(a)	$\mathbb{Z}_6$	$\{2,2,3,3\}$	2
		Tre valori critici	
(b)	$\mathbb{Z}_{4g+2}$	$\{2,2g+1,4g+2\}$	$g \geq 2$
(c)	$\mathbb{Z}_{4g}$	$\{2,4g,4g\}$	$g \geq 2$
(d)	$\mathbb{Z}_{12}$	$\{3,4,12\}$	3
(e)	$\mathbb{Z}_{15}$	$\{3,5,15\}$	4
(f)	$\mathbb{Z}_6$	$\{3,6,6\}$	2
(g)	$\mathbb{Z}_{21}$	$\{3,7,21\}$	6
(h)	$\mathbb{Z}_9$	$\{3,9,9\}$	3
(i)	$\mathbb{Z}_5$	$\{5,5,5\}$	2
(j)	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2g+2}$	$\{2,2g+2,2g+2\}$	$g \geq 2$
(k)	$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_9$	$\{3,9,9\}$	7
(l)	$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$	$\{3,6,6\}$	4
(m)	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$	$\{4,4,4\}$	3
(n)	$\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$	$\{5,5,5\}$	6

Tabella 5.1: La lista dei gruppi abeliani large con gli indici di ramificazione ed il genere delle superfici di Riemann C su cui agiscono.

5.3 Generalizzazione del teorema 5.2.1

Sia C una superficie di Riemann di genere $g_C \geq 2$, G gruppo di automorfismi di C e $C' = C/G$.
Qual'è la condizione di disuguaglianza sull'ordine di G, più debole rispetto alla disuguaglianza che definisce un gruppo *large*, che continua a garantire la non esistenza di un gruppo abeliano di automorfismi di C con il genere dello spazio quoziente C' non nullo, in particolare $g_{C'} = 1$?

Riassumendo possiamo dire che il risultato per i gruppi large viene fornito dai teoremi 5.2.1 e 5.2.2: imponendo $|G| > 4(g_C - 1)$, la formula di

Riemann-Hurwitz esclude i casi con $g_{C'} \neq 0$.
Inoltre è facile verificare grazie alla formula di Riemann-Hurwitz che il caso $|G| = 4(g_C - 1)$, oltre ai casi con $g_{C'} = 0$, ci porta ad un unico caso di $g_{C'} = 1$ con un unico indice di ramificazione $\{2\}$. Ma il lemma 5.1.1 ci assicura che non esiste alcun gruppo di automorfismi G abeliano con un unico indice di ramificazione. Quindi la disuguaglianza si può migliorare!

Vogliamo trovare una disuguaglianza meno restrittiva che continui ad implicare $g_{C'} = 0$.
Cercheremo una disuguaglianza della forma $|G| > ag_C - b$ e assumiamo innanzitutto $a = b$.
Dobbiamo trovare a minimo, tale per cui la condizione $|G| > a(g_C - 1)$ garantisce la non esistenza dei rivestimenti abeliani di C', con genere $g_{C'} \geq 1$.

Usiamo la formula di Riemann-Hurwitz

$$2g_C - 2 = | G | \left\{ 2g_{C'} - 2 + \sum_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{e_j}\right) \right\}.$$

Definiamo

$$\lambda := 2g_{C'} - 2 + \sum_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{e_j}\right).$$

Imponendo la condizione $| G |> a(g_C - 1)$ considerando che $g_C > 1$ otteniamo:

$$\begin{aligned} 2(g_C - 1) &= | G | \lambda \\ &> a\lambda(g_C - 1) \\ \Rightarrow \frac{2}{a} &> \lambda \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned} 2g_{C'} - 2 + \sum_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{e_j}\right) &< \frac{2}{a} \\ g_{C'} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{e_j}\right) &< \frac{1}{a} + 1. \end{aligned}$$

Se $g_{C'} = 1$, l'ipotesi $g_C > 1$ implica che $k \geq 1$, e per il lemma 5.1.1 segue $k \geq 2$; inoltre vale $e_j \geq 2$.
Da questo segue che se $g_{C'} \geq 1$, allora $\lambda = 2g_{C'} - 2 + \sum_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{e_j}\right) \geq 1$.
Riassumiamo le due condizioni trovate su λ:

$$1 \leq \lambda < \frac{2}{a}.$$

Quest'ultima disuguaglianza vale se e solo se $a < 2$, risulta invece contraddittoria per $a \geq 2$.

Da questo possiamo trarre le conclusioni dicendo che: il minimo di a, tale per cui la condizione $|G| > a(g_C - 1)$ garantisce la non esistenza dei rivestimenti abeliani di C', con genere $g_{C'} = 1$, è $a_{\min} = 2$ e la disuguaglianza cercata è:

$$|G| > 2(g_C - 1).$$

Abbiamo dimostrato il seguente teorema

Teorema 5.3.1. *Sia C una superficie di Riemann di genere $g_C \geq 2$ e G un gruppo abeliano di ordine $|G| > 2g_C - 2$, allora $g_{C'} = 0$, ovvero*

$$C' \cong \mathbb{P}^1.$$

5.4 Il caso del quoziente ellittico

È possibile trovare una disuguaglianza ancora più stretta? Ovvero riusciamo a trovare a, b con $a < 2$ tale che la disuguaglianza

$$|G| > ag_C - b$$

garantisca la non esistenza di alcun rivestimento abeliano di C' con genere $g_{C'} \geq 1$?

Consideriamo il caso $|G| = 2(g_C - 1)$, $g_{C'} = 1$ e per come è definito λ e per la formula di Riemann-Hurwitz si ha

- $\lambda = \sum_{j=1}^{k} \left(1 - \dfrac{1}{e_j}\right) \geq 1$, siccome $k \geq 2$ e $e_j \geq 2$,
- $\lambda = \dfrac{2g_C - 2}{|G|} = 1.$

Segue che $\lambda = \sum_{j=1}^{k} \left(1 - \dfrac{1}{e_j}\right) = 1$ e gli indici di ramificazione sono $\{2, 2\}$.

$$\left.\begin{array}{cc} \text{Se } G \text{ è abeliano,} & \\ \text{per il teorema 5.1.2} & \Rightarrow |G|\,|\,2 \\ \text{e inoltre} & 2\,|\,|G| \end{array}\right\} \Rightarrow |G| = 2.$$

Otteniamo così il gruppo ciclico $G \cong \mathbb{Z}_2$.

Rimane da dimostrare l'esistenza di questo caso con il metodo descritto alla fine del paragrafo 4.3 e usato nella dimostrazione del lemma 5.1.1.

Abbiamo calcolato

$$\begin{aligned} H_1(T_1 \setminus \{Q_1, Q_2\}) &= \langle \alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2 \mid \gamma_1\gamma_2 = 1 \rangle \\ &= \langle \alpha, \beta, \gamma_1 \rangle \\ &= \mathbb{Z}^{\oplus 3}. \end{aligned}$$

Prendiamo $H \lhd H_1(C' \setminus \{Q_1, Q_2\})$ tale che

- $H_1/H \cong G \cong \mathbb{Z}_2$
- per due cammini $\gamma_1, \gamma_2 \in H_1(T_1 \setminus \{Q_1, Q_2\})$ di cui sopra, si ha

$$\gamma_1\gamma_2 = 1, \text{ con } \gamma_1^2, \gamma_2^2 \in H$$

$$\text{e } \forall 0 < \lambda_1, \lambda_2 < e_i = 2 \qquad \gamma_1^{\lambda_1}, \gamma_2^{\lambda_2} \notin H.$$

Questo vuol dire, considerato

$$1 \longrightarrow H \longrightarrow H_1 \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

con ψ suriettiva, che

$$\psi(\gamma_1) \text{ ha ordine } e_1 = 2 \text{ in } \mathbb{Z}_2,$$

$$\psi(\gamma_2) \text{ ha ordine } e_2 = 2 \text{ in } \mathbb{Z}_2.$$

Quindi $\psi(\gamma_1) = \psi(\gamma_2) = 1 \in \mathbb{Z}_2$.
Gli altri due generatori α e β possono essere mappati in qualsiasi elemento di $\mathbb{Z}_2$ e danno luogo a 4 casi:

$$1^o \text{ caso } \psi_1 : \begin{cases} \alpha & \longmapsto & 0 \\ \beta & \longmapsto & 0 \end{cases} \qquad 2^o \text{ caso } \psi_2 : \begin{cases} \alpha & \longmapsto & 0 \\ \beta & \longmapsto & 1 \end{cases}$$

$$3^o \text{ caso } \psi_3 : \begin{cases} \alpha & \longmapsto & 1 \\ \beta & \longmapsto & 0 \end{cases} \qquad 4^o \text{ caso } \psi_4 : \begin{cases} \alpha & \longmapsto & 1 \\ \beta & \longmapsto & 1 \end{cases}$$

Abbiamo così dimostrato l'esistenza di un rivestimento doppio di una curva ellittica ramificato in due punti. Dalla formula di Riemann-Hurwitz il genere della superficie C è 2.

Nel seguente esempio generalizziamo la costruzione precedente al fine di dimostrare che non è possibile migliorare la disuguaglianza del teorema 5.3.1

Esempio 5.1. Prendiamo il caso dei due valori critici $\{2, 2\}$ con $g_{C'} = 1$ e $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_m$.

$$\begin{array}{rcl} H_1(C' \setminus \{Q_1, Q_2\}) & \longrightarrow & G \\ \gamma_1 & \longmapsto & (1,0) \\ \gamma_2 & \longmapsto & (1,0) \\ \alpha & \longmapsto & (0,1) \\ \beta & \longmapsto & (0,0) \end{array}$$

Per la formula di Riemann-Hurwitz

$$2g_C - 2 \quad = \quad 2m \Rightarrow g_C = 1 + m$$

e quindi $|G| = 2g_C - 2$.
Questo esempio con g_C arbitrariamente alto mostra che non è possibile migliorare la disuguaglianza sostituendola con una disuguaglianza $|G| > ag_C - b$ con $a < 2$, indipendentemente dalla scelta di b.

5.5 Gruppi abeliani *quasi large* di automorfismi

Definizione 44. Data C superficie di Riemann di genere $g_C \geq 2$ e G sottogruppo di $Aut(C)$ diremo che G è un **gruppo quasi large** se

$$|G| > 2g_C - 2.$$

Teorema 5.5.1. *Sia G ciclico e quasi large, quindi $g(C/G) = 0$. Indichiamo con k il numero dei valori critici della proiezione $p : C \longrightarrow \mathbb{P}^1$. Allora il minimo comune multiplo di ogni $k-1$- upla di indici di ramificazione è uguale all'ordine di G.*

Dimostrazione. Come abbiamo osservato in precedenza, $k - 1$ elementi di $\{x_1, \ldots, x_k\}$ devono generare G.
In un gruppo ciclico finito l'ordine di un sottogruppo generato da un sottoinsieme equivale al minimo comune multiplo degli ordini degli elementi nel sottoinsieme. □

Enunciamo e dimostriamo un'altra proposizione che ci servirà nella dimostrazione del teorema che segue:

Proposizione 5.5.2. *Preso $[m] \in \mathbb{Z}_n$ allora*

$$ord(m) = n \Longleftrightarrow \gcd(m, n) = 1.$$

Dimostrazione. Sia $[m] \in \mathbb{Z}_n$ e $\text{ord}([m]) \neq n$ allora $\exists \lambda < n$ tale che $n \mid \lambda m$ e dunque $\gcd(m, n) \neq 1$.
Viceversa se $\gcd(m, n) \neq 1$, $\exists p > 1$ con $p \mid m$ e $p \mid n$ e dunque $\frac{m}{p}, \frac{n}{p} \in \mathbb{N}$, osserviamo che $n \mid n \cdot \frac{m}{p} = \frac{n}{p} \cdot m$, ovvero $\text{ord}(m) \leq \frac{n}{p} < n$. Da questo segue che $\text{ord}(m) \neq n$. □

Quello che segue è il risultato principale di questa tesi.

Teorema 5.5.3. *Sia C superficie di Riemann di genere $g_C \geq 2$, G gruppo abeliano quasi large di automorfismi di C e $C' = C/G$.*
Allora $g_{C'} = 0$ e la proiezione $p : C \longrightarrow C'$ può avere $3, 4$ o 5 valori critici. Le terne (Gruppo, Indici di ramificazione, Genere di C) possibili sono esattamente le terne nella seguente tabella:

$*$ dove, nel caso dei tre valori critici, $\alpha, \beta, \delta_1, \delta_2$ e δ_3 sono cinque numeri naturali qualunque tali che $\forall i \neq j$, $\gcd(\delta_i, \delta_j) = 1$ e inoltre tali che $\delta_1\delta_2\delta_3\,(\beta + 1)$ sia pari e

$$f(\alpha, \beta, \delta_1, \delta_2, \delta_3) = \frac{\alpha}{2}\left\{\alpha\beta\delta_1\delta_2\delta_3 - \delta_1 - \delta_2 - \delta_3\right\}.$$

Dimostrazione. Usiamo la formula di Riemann-Hurwitz

$$2g_C - 2 = \mid G \mid \left\{ 2g_{C'} - 2 + \sum_{j=1}^{k}\left(1 - \frac{1}{e_j}\right)\right\}.$$

Definiamo

$$\lambda := 2g_{C'} - 2 + \sum_{j=1}^{k}\left(1 - \frac{1}{e_j}\right).$$

Imponendo la condizione di G quasi large, ovvero $\mid G \mid > 2(g_C - 1)$ e $k \geq 2$ considerando che $g_C \geq 2$ otteniamo:

$$\begin{aligned} 2(g_C - 1) &= \mid G \mid \lambda \\ &> 2\lambda(g_C - 1) \\ \Rightarrow 1 &> \lambda \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned} 2g_{C'} - 2 + \sum_{j=1}^{k}\left(1 - \frac{1}{e_j}\right) &< 1 \\ g_{C'} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\left(1 - \frac{1}{e_j}\right) &< \frac{3}{2} \end{aligned}$$

	Gruppo abeliano	Indici di ramificazione	Genere di C: $g \geq 2$
		Cinque valori critici	
(a)	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\{2,2,2,2,2\}$	2
(b)	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\{2,2,2,2,2\}$	3
(c)	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\{2,2,2,2,2\}$	5
(d)	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$	$\{2,2,2,3,3\}$	6
		Quattro valori critici	
(a)	$\mathbb{Z}_{2g}$	$\{2,2,2g,2g\}$	g
(b)	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{g+1}$	$\{2,2,g+1,g+1\}$	g
(c)	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{g+2}$	$\left\{2,2,\frac{g}{2}+1,g+2\right\}$	$4t, \quad t \in \mathbb{Z}^{\geq 1}$
(d)	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{\frac{g+3}{2}}$	$\left\{2,2,\frac{g+3}{2},\frac{g+3}{2}\right\}$	$4t-3, \quad t \in \mathbb{Z}^{\geq 2}$
(e)	$\mathbb{Z}_6$	$\{2,3,3,6\}$	3
(f)	$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$	$\{2,3,3,6\}$	7
(g)	$\mathbb{Z}_{12}$	$\{2,3,4,12\}$	6
(h)	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12}$	$\{2,3,4,12\}$	11
(i)	$\mathbb{Z}_{30}$	$\{2,3,5,30\}$	15
(j)	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$	$\{2,3,6,6\}$	6
(k)	$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$	$\{2,3,6,6\}$	16
(l)	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$	$\{2,4,4,4\}$	7
(m)	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$	$\{2,4,4,4\}$	13
(n)	$\mathbb{Z}_3$	$\{3,3,3,3\}$	2
(o)	$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$	$\{3,3,3,3\}$	4
(p)	$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$	$\{3,3,3,3\}$	10
(q)	$\mathbb{Z}_{12}$	$\{3,3,4,4\}$	6
(r)	$\mathbb{Z}_{15}$	$\{3,3,5,5\}$	8
		Tre valori critici	
$*$	$\mathbb{Z}_\alpha \times \mathbb{Z}_{\alpha\beta\delta_1\delta_2\delta_3}$	$\{\alpha\beta\delta_2\delta_3, \alpha\beta\delta_1\delta_3, \alpha\beta\delta_1\delta_2\}$	$1+f(\alpha,\beta,\delta_1,\delta_2,\delta_3)$

Tabella 5.2: La lista dei gruppi abeliani quasi large, con gli indici di ramificazione ed il genere delle superfici di Riemann C su cui agiscono.

Da cui segue $g_{C'} \leq 1$. Se $g_{C'} = 1$ avremmo

$$\lambda = \sum_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{e_j}\right).$$

Ma siccome per ipotesi abbiamo $g_C \geq 2$, $k \geq 2$ e $e_j \geq 2$, si ha $\lambda \geq 1$. Possiamo concludere $g_{C'} = 0$ e

$$0 < \lambda = -2 + \sum_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{e_j}\right) < 1$$

Da

$$\left.\begin{array}{lll} \lambda<1 & \Rightarrow & \sum_{j=1}^{k}\left(1-\dfrac{1}{e_j}\right)<3 \Rightarrow k\leq 5 \\ 0<\lambda & \Rightarrow & 2<\sum_{j=1}^{k}\left(1-\dfrac{1}{e_j}\right) \Rightarrow 3\leq k \end{array}\right\} \Rightarrow 3\leq k\leq 5,\ \text{cioè } k\in\{3,4,5\}\,.$$

(I) Caso dei cinque valori critici $k=5$: cerchiamo i valori e_j per cui

$$\lambda = 3-\frac{1}{e_1}-\frac{1}{e_2}-\frac{1}{e_3}-\frac{1}{e_4}-\frac{1}{e_5}<1$$

Poniamo $e_1\leq e_2\leq e_3\leq e_4\leq e_5$.
Se $e_1\geq 3$ allora $\lambda\geq 3-\frac{5}{3}=\frac{4}{3}$, quindi $e_1=2$.
Se $e_2\geq 3$ allora $\lambda\geq \frac{5}{2}-\frac{4}{3}=\frac{7}{6}$, quindi $e_2=2$.
Se $e_3\geq 3$ allora $\lambda\geq 2-\frac{3}{3}=1$, quindi $e_3=2$.
Se $e_4\geq 4$ allora $\lambda\geq \frac{3}{2}-\frac{2}{4}=1$, quindi $e_4=2$ oppure $e_4=3$.
Se $e_4=2$ allora qualsiasi valore $e_5\geq 2$ soddisfa la disuguaglianza.
Se $e_4=3$ allora $\lambda\geq \frac{3}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{e_5}=\frac{7}{6}-\frac{1}{e_5}$, quindi $3\leq e_5\leq 5$.

(II) Caso dei quattro valori critici $k=4$: cerchiamo i valori e_j per cui

$$\lambda = 2-\frac{1}{e_1}-\frac{1}{e_2}-\frac{1}{e_3}-\frac{1}{e_4}<1$$

$$\Rightarrow 1<\frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}+\frac{1}{e_3}+\frac{1}{e_4}$$

Osserviamo che non può essere $e_1\geq 4$, quindi $e_1\in\{2,3\}$.
Se $e_1=2\Rightarrow \frac{1}{2}<\frac{1}{e_2}+\frac{1}{e_3}+\frac{1}{e_4}\Rightarrow 2\leq e_2\leq 5$.
Se $e_2=2$ tutti i valori di $2\leq e_3\leq e_4$ soddisfano la disuguaglianza $\lambda>1$; siccome $\lambda>0$ se $e_3=2$ allora $e_4\geq 3$.
Se $e_2=3\Rightarrow \frac{1}{6}<\frac{1}{e_3}+\frac{1}{e_4}\Rightarrow 3\leq e_3\leq 11$. Considerando tutti i possibili casi di e_3 otteniamo i casi di indici di ramificazione da (b) a (g) della lista riassuntiva che segue.
Se $e_2=4\Rightarrow \frac{1}{4}<\frac{1}{e_3}+\frac{1}{e_4}\Rightarrow 4\leq e_3\leq 7$. Considerando tutti i possibili casi di e_3 otteniamo i casi di indici di ramificazione da (h) a (k) della lista riassuntiva che segue.
Se $e_2=5\Rightarrow \frac{3}{10}<\frac{1}{e_3}+\frac{1}{e_4}\Rightarrow 5\leq e_3\leq 6$. Considerando i due possibili casi di e_3 otteniamo i casi di indici di ramificazione (l) e (m) della lista riassuntiva che segue.

Se $e_1=3\Rightarrow \dfrac{2}{3}<\frac{1}{e_2}+\frac{1}{e_3}+\frac{1}{e_4}\Rightarrow e_2\leq 4$.
Se $e_2=3\Rightarrow \dfrac{1}{3}<\dfrac{1}{e_3}+\dfrac{1}{e_4}\Rightarrow 3\leq e_3\leq 5$.
Se $e_3=3\Rightarrow e_4\geq 3$.
Se $e_2=3$ e $e_3=4\Rightarrow 4\leq e_4\leq 11$.

Se $e_2 = 3$ e $e_3 = 5 \Rightarrow 5 \leq e_4 \leq 7$.
Se $e_2 = 4 \Rightarrow \frac{5}{12} < \frac{1}{e_3} + \frac{1}{e_4} \Rightarrow e_3 = 4$. Segue $\frac{1}{6} < \frac{1}{e_4} \Rightarrow e_4 \in \{4, 5\}$.

(III) Caso dei tre valori critici $k = 3$: cerchiamo i valori e_j per cui

$$\lambda = 1 - \frac{1}{e_1} - \frac{1}{e_2} - \frac{1}{e_3} < 1$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} + \frac{1}{e_3} < 1.$$

Supponendo $e_1 = 2$ e $e_1 = 3$ si ottengono rispettivamente le famiglie doppiamente infinite (III) (a) e (b) della lista riassuntiva che segue. Per $e_1 \geq 4$ invece si ottiene la famiglia triplicemente infinita (III) (c).

Riassumiamo le possibilità a cui ci siamo ristretti, prima di dimostrare quali portano effettivamente all'esistenza di un rivestimento abeliano di $\mathbb{P}^1$:

(I) Cinque valori critici:

- (a) Una famiglia infinita: $\{2, 2, 2, 2, n\}$, $2 \leq n$.
- (b) Tre casi eccezionali: $\{2, 2, 2, 3, a\}$, $3 \leq a \leq 5$.

(II) Quattro valori critici:

- (a) Una famiglia doppiamente infinita: $\{2, 2, m, n\}$, $2 \leq m \leq n$; se $m = 2 \Rightarrow 3 \leq n$.
- (b) Quattro famiglie infinite: $\{2, 3, a, n\}$, $3 \leq a \leq 6$ e $a \leq n$.
- (c) 35 casi: $\{2, 3, 7, a\}$, $7 \leq a \leq 41$.
- (d) 16 casi: $\{2, 3, 8, a\}$, $8 \leq a \leq 23$.
- (e) 9 casi: $\{2, 3, 9, a\}$, $9 \leq a \leq 17$.
- (f) 5 casi: $\{2, 3, 10, a\}$, $10 \leq a \leq 14$.
- (g) 3 casi: $\{2, 3, 11, a\}$, $11 \leq a \leq 13$.
- (h) Una famiglia infinita: $\{2, 4, 4, n\}$, $4 \leq n$.
- (i) 15 casi: $\{2, 4, 5, a\}$, $5 \leq a \leq 19$.
- (j) 6 casi: $\{2, 4, 6, a\}$, $6 \leq a \leq 11$.
- (k) 3 casi: $\{2, 4, 7, a\}$, $7 \leq a \leq 9$.
- (l) 5 casi: $\{2, 5, 5, a\}$, $5 \leq a \leq 9$.
- (m) 2 casi: $\{2, 5, 6, a\}$, $6 \leq a \leq 7$.
- (n) Una famiglia infinita: $\{3, 3, 3, n\}$, $3 \leq n$.
- (o) 8 casi: $\{3, 3, 4, a\}$, $4 \leq a \leq 11$.
- (p) 3 casi: $\{3, 3, 5, a\}$, $5 \leq a \leq 7$.

(q) 2 casi: $\{3,4,4,a\}$, $4 \leq a \leq 5$.

(III) Tre valori critici:

(a) Una famiglia doppiamente infinita: $\{2,m,n\}$, $3 \leq m \leq n$;
se $m = 3$ allora $n \geq 7$,
se $m = 4$ allora $n \geq 5$.

(b) Una famiglia doppiamente infinita: $\{3,m,n\}$, $3 \leq m \leq n$;
se $m = 3$ allora $n \geq 4$.

(c) Una famiglia triplicemente infinita: $\{l,m,n\}$, $4 \leq l \leq m \leq n$.

Ci chiediamo ora per quali dei casi precedenti esista effettivamente una superficie di Riemann che sia un rivestimento abeliano di $\mathbb{P}^1$.
Il procedimento che seguiamo per verificare l'esistenza dei casi è quello usato nella dimostrazione del lemma 5.1.1. Ricordiamo prima il metodo in generale e poi lo applichiamo ai vari casi.

Grazie al teorema di Seifert van Kampen abbiamo calcolato l'abelianizzato del gruppo fondamentale di una superficie di Riemann di genere g meno k punti:

$$H_1(T_g \setminus \{Q_1 \dots Q_k\}) \quad = \quad \mathbb{Z}^{2g+k}/(\gamma_1\gamma_2 \dots \gamma_k = 1) = \mathbb{Z}^{\oplus(2g+k-1)}.$$

Noto il gruppo G abeliano e dati gli indici di ramificazione $\{e_1, \dots, e_k\}$, per il teorema 4.3.4 possiamo procedere nel seguente modo:
Prendiamo $H \triangleleft H_1(T_g \setminus \{Q_1, \dots, Q_k\})$, tale che

- $H_1/H \cong G$
- presi k cammini $\gamma_1, \dots, \gamma_k \in H_1(T_g \setminus \{Q_1, \dots, Q_k\})$, γ_i laccetto intorno a Q_i, si ha
$$\prod_{i=1}^{k} \gamma_i = 1,$$
$$\gamma_i^{e_i} \in H \qquad \forall i = 1, \dots, k$$
$$\text{e } \forall 0 < \lambda < e_i \qquad \gamma_i^{\lambda} \notin H.$$

Questo vuol dire, considerato

$$1 \longrightarrow H \longrightarrow H_1 \xrightarrow{\psi} G \longrightarrow 0$$

con ψ suriettiva, che

$$\psi(\gamma_i) \text{ ha ordine } e_i \text{ in } G, \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}.$$

Dobbiamo quindi

$$\left.\begin{array}{ll} \text{costruire} & \text{una funzione} \\ & \psi : H_1 \longrightarrow G \\ \text{suriettiva} & \text{tale che} \\ \psi(\gamma_1) & \text{ha ordine } e_1 \\ & \dots \\ \psi(\gamma_k) & \text{ha ordine } e_k. \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} \text{trovare} & m_1, \dots, m_k \in G \\ \text{tale che} & \langle m_1, \dots, m_k \rangle = G \\ \text{e} & m_1 + \ldots + m_k = 0 \\ m_1 & \text{ha ordine } e_1 \\ & \dots \\ m_k & \text{ha ordine } e_k. \end{array}\right.$$

(I) Cinque valori critici $k = 5$:
Dobbiamo trovare

$$\begin{array}{ll} & m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 \in G \\ \text{tale che} & \langle m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 \rangle = G \\ \text{e} & m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 = 0 \\ m_1 & \text{ha ordine } e_1 \\ m_2 & \text{ha ordine } e_2 \\ m_3 & \text{ha ordine } e_3 \\ m_4 & \text{ha ordine } e_4 \\ m_5 & \text{ha ordine } e_5. \end{array}$$

(a) Una famiglia infinita: $\{2, 2, 2, 2, n\}$, $2 \leq n$.

$$\left.\begin{array}{cr} \text{Se } G \text{ è abeliano,} & \\ \text{per il teorema 5.1.2} & \Rightarrow |G| \big| 16 \\ \text{e inoltre} & 2 \big| |G| \end{array}\right\} \Rightarrow |G| \in \{2, 4, 8, 16\}.$$

- Se $|G| = 2$ per la formula di Riemann-Hurwitz otteniamo $2g_C - 2 = 2\left(1 - \frac{1}{n}\right) \Rightarrow g_C < 2$, assurdo.
- Se $|G| = 4$, per la formula di Riemann-Hurwitz otteniamo

$$g_C = 3 - \frac{2}{n}$$

e l'unico caso possibile è $n = 2$ e $g_C = 2$. Per il teorema di classificazione 5.1.3 abbiamo i due casi

$$\begin{array}{rcl} G & \cong & \mathbb{Z}_4 \\ G & \cong & \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2. \end{array}$$

Escludiamo il caso del gruppo ciclico per il teorema 5.5.1.
L'unica possibilità che può verificarsi con $|G| = 4$ è

$$G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \text{ con } \{2, 2, 2, 2, 2\} \text{ e } g_C = 2.$$

Dimostriamo l'esistenza del caso e ripetiamo il procedimento da seguire; dobbiamo

$$\begin{array}{ll} \text{trovare} & m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \\ \text{tale che} & \langle m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 \rangle = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \\ \text{e} & m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 = 0 \\ m_1 & \text{ha ordine 2} \\ m_2 & \text{ha ordine 2} \\ m_3 & \text{ha ordine 2} \\ m_4 & \text{ha ordine 2} \\ m_5 & \text{ha ordine 2} \end{array}$$

Vediamo un esempio che conferma l'esistenza del caso:

$$\begin{array}{l} \psi(\gamma_1) = m_1 = (1,0) \\ \psi(\gamma_2) = m_2 = (0,1) \\ \psi(\gamma_3) = m_3 = (1,1) \\ \psi(\gamma_4) = m_4 = (1,0) \\ \text{allora} \\ \psi(\gamma_5) = m_5 = -m_1 - m_2 - m_3 - m_4 = (1,0). \end{array}$$

- Se $|G| = 8$, per la formula di Riemann-Hurwitz otteniamo

$$g_C = 5 - \frac{4}{n}$$

e i due casi possibili sono $n = 2, 4$, con rispettivamente $g_C = 3, 4$. Per il teorema di classificazione 5.1.3 abbiamo i tre casi

$$\begin{array}{lcl} G & \cong & \mathbb{Z}_8 \\ G & \cong & \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \\ G & \cong & \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2. \end{array}$$

Escludiamo il caso del gruppo ciclico per il teorema 5.5.1.
Si hanno dunque i quattro casi:

$$\begin{array}{lcl} G & \cong & \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \text{ con } \{2,2,2,2,4\} \text{ e } g_C = 4 \\ G & \cong & \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \text{ con } \{2,2,2,2,2\} \text{ e } g_C = 3 \\ G & \cong & \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \text{ con } \{2,2,2,2,2\} \text{ e } g_C = 3 \\ G & \cong & \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \text{ con } \{2,2,2,2,4\} \text{ e } g_C = 4. \end{array}$$

Escludiamo il secondo caso siccome il gruppo non può essere generato da un insieme di elementi di ordini $\{2,2,2,2,2\}$; anche il quarto caso viene escluso, siccome il gruppo non ha elementi di ordine 4.

Possiamo dimostrare che il primo caso non esiste:

$\psi(\gamma_1) = m_1$ ha ordine 2, quindi $m_1 \in \mathbb{Z}_2 \times \{0, 2\}$
$\psi(\gamma_2) = m_2$ ha ordine 2, quindi $m_2 \in \mathbb{Z}_2 \times \{0, 2\}$
$\psi(\gamma_3) = m_3$ ha ordine 2, quindi $m_3 \in \mathbb{Z}_2 \times \{0, 2\}$
$\psi(\gamma_4) = m_4$ ha ordine 2, quindi $m_4 \in \mathbb{Z}_2 \times \{0, 2\}$
allora
$\psi(\gamma_5) = m_5 = -m_1 - m_2 - m_3 - m_4 = (a_5, b_5) \in \mathbb{Z}_2 \times \{0, 2\}$
non può avere ordine 4 siccome b_5 non è dispari.

Verifichiamo invece l'esistenza del caso $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ con $\{2, 2, 2, 2, 2\}$:

$\psi(\gamma_1) = m_1 = (1, 0, 0) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ha ordine 2
$\psi(\gamma_2) = m_2 = (0, 1, 0) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ha ordine 2
$\psi(\gamma_3) = m_3 = (0, 0, 1) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ha ordine 2
$\psi(\gamma_4) = m_4 = (1, 1, 0) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ha ordine 2
allora
$\psi(\gamma_5) = m_5 = -m_1 - m_2 - m_3 - m_4 = (0, 0, 1) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
ha ordine 2.

- Se $|G| = 16$, per la formula di Riemann-Hurwitz

$$g_C = 9 - \frac{8}{n}$$

e i tre casi possibili sono $n = 2, 4, 8$, con $g_C = 5, 7, 8$ rispettivamente. Per il teorema di classificazione 5.1.3 abbiamo i casi

$$\begin{aligned}
G &\cong \mathbb{Z}_{16} \\
G &\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8 \\
G &\cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 \\
G &\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \\
G &\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.
\end{aligned}$$

Combinando i gruppi con gli indici di ramificazione calcolati, otteniamo 15 casi. Escludiamo il caso del gruppo ciclico per il teorema 5.5.1. Nessun gruppo della lista rimanente, tranne $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8$, ha elementi di ordine 8. Osserviamo inoltre che il gruppo $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8$ non può essere generato da un insieme di elementi di ordini $\{2, 2, 2, 2, 2\}$ oppure $\{2, 2, 2, 2, 4\}$. $G \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ e $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ non vengono generati da elementi di ordini $\{2, 2, 2, 2, 2\}$. L'ultimo caso $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ non ha elementi di ordine 4.

Si hanno dunque i quattro casi:

$$\begin{aligned} G &\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8 \text{ con } \{2,2,2,2,8\} \text{ e } g_C = 8 \\ G &\cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 \text{ con } \{2,2,2,2,4\} \text{ e } g_C = 7 \\ G &\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \text{ con } \{2,2,2,2,4\} \text{ e } g_C = 7 \\ G &\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \text{ con } \{2,2,2,2,2\} \text{ e } g_C = 5. \end{aligned}$$

Seguendo lo stesso ragionamento del caso precedente si dimostra che i primi tre casi con gruppo abeliano di ordine 16 non esistono: Nel primo caso $m_5 = (a_5, b_5)$ non è mai di ordine 8 siccome b_5 può essere solo pari, nel secondo caso $m_5 = (a_5, b_5)$ non è mai di ordine 4 siccome sia a_5 che b_5 possono essere solo pari e nel terzo caso $m_5 = (a_5, b_5, c_5)$ non è mai di ordine 4 siccome c_5 può essere solo pari.

Vediamo invece un esempio che conferma l'esistenza del caso $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ con $\{2,2,2,2,2\}$:

$\psi(\gamma_1) = m_1 = (1,0,0,0) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ha ordine 2
$\psi(\gamma_2) = m_2 = (0,1,0,0) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ha ordine 2
$\psi(\gamma_3) = m_3 = (0,0,1,0) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ha ordine 2
$\psi(\gamma_4) = m_4 = (0,0,0,1) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ha ordine 2
allora
$\psi(\gamma_5) = m_5 = -m_1 - m_2 - m_3 - m_4 =$
$= (-1,-1,-1,-1) \mod 2 = (1,1,1,1) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
ha ordine 2.

(b) Tre casi eccezionali: $\{2,2,2,3,a\}$, $3 \le a \le 5$.

$$\left.\begin{array}{cc} \text{Se } G \text{ è abeliano,} & \\ \text{per il teorema 5.1.2} & \Rightarrow |G|\big|24 \\ \text{e inoltre} & 2\big||G|, 3\big||G| \end{array}\right\} \Rightarrow |G| \in \{6, 12, 24\}.$$

- Se $|G| = 6$ per la formula di Riemann-Hurwitz otteniamo

$$2g_C = 9 - \frac{6}{a}.$$

$\nexists a$ con $3 \le a \le 5$, tale che $g_C \in \mathbb{Z}^{\ge 2}$, assurdo.

- Se $|G| = 12$, per la formula di Riemann-Hurwitz si ottiene

$$g_C = 8 - \frac{6}{a}.$$

e quindi, siccome $3 \leq a \leq 5$, $a = 3$ con $g_C = 6$.
Otteniamo quindi, per il teorema 5.5.1, $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$ con $\{2, 2, 2, 3, 3\}$ e $g_C = 6$.
Verifichiamo l'esistenza prendendo:

$\psi(\gamma_1) = m_1 = (1, 0) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$ ha ordine 2
$\psi(\gamma_2) = m_2 = (0, 3) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$ ha ordine 2
$\psi(\gamma_3) = m_3 = (1, 3) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$ ha ordine 2
$\psi(\gamma_4) = m_4 = (0, 2) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$ ha ordine 3
allora
$\psi(\gamma_5) = m_5 = -m_1 - m_2 - m_3 - m_4 = (0, 4) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$
ha ordine 3.

- Se $|G| = 24$, per il teorema di classificazione 5.1.3 abbiamo i casi

$$\begin{aligned} G &\cong \mathbb{Z}_{24} \\ G &\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12} \\ G &\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6. \end{aligned}$$

Per la formula di Riemann-Hurwitz otteniamo

$$g_C = 15 - \frac{12}{a}$$

e i casi possibili dunque sono $a = 3, 4$, con rispettivamente $g_C = 11, 12$.
Escludiamo il caso del gruppo ciclico per il teorema 5.5.1.
Osserviamo che $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12}$ non ha un insieme di generatori di ordini $\{2, 2, 2, 3, 3\}$. Escludiamo anche il caso $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$ con $\{2, 2, 2, 3, 4\}$, siccome il gruppo non ha elementi di ordine 4.
Gli unici due casi possibili sono:

(i) il gruppo abeliano $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12}$ con $\{2, 2, 2, 3, 4\}$ e $g_C = 12$, ma si dimostra che non esiste:

$\psi(\gamma_1) = m_1$ ha ordine 2, quindi $m_1 \in \mathbb{Z}_2 \times \{0, 6\}$
$\psi(\gamma_2) = m_2$ ha ordine 2, quindi $m_2 \in \mathbb{Z}_2 \times \{0, 6\}$
$\psi(\gamma_3) = m_3$ ha ordine 2, quindi $m_3 \in \mathbb{Z}_2 \times \{0, 6\}$
$\psi(\gamma_4) = m_4$ ha ordine 3, quindi $m_4 \in \{0\} \times \{4, 8\}$
allora
$\psi(\gamma_5) = m_5 = -m_1 - m_2 - m_3 - m_4 = (a_5, b_5)$
$\mathbb{Z}_2 \times \{2, 4, 8, 10\}$
non può avere ordine 4 siccome b_5 non è dispari.

(ii) il gruppo abeliano $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$ con $\{2, 2, 2, 3, 3\}$ e $g_C = 11$; dimostriamo che non esiste:
Supponiamo per assurdo che $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$ abbia un insieme

di generatori sferici $\{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5\}$ di ordini $\{2, 2, 2, 3, 3\}$; sia

$$\varphi\colon \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

la proiezione sul quoziente. Osserviamo che si tratta di un omomorfismo suriettivo.
Definiamo $h_i := \varphi(g_i)$.
Allora gli h_i formano un insieme di generatori sferici di $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, e

$$\mathrm{ord}(h_i)\big|\mathrm{ord}(g_i).$$

Dal momento che ogni elemento non nullo di $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ha ordine 2, segue $h_4 = h_5 = 0$; quindi $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ha un insieme di generatori sferici, $\{h_1, h_2, h_3\}$, di cardinalità 3.
Notiamo che $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ è uno spazio vettoriale sul campo con due elementi F_2, di dimensione 3. Un insieme di generatori di $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ come gruppo, ne è anche un insieme di generatori come spazio vettoriale. D'altronde, la proprietà di essere sferici, $h_1 + h_2 + h_3 = 0$, garantisce che sono linearmente dipendenti. Avremmo quindi tre elementi che generano uno spazio vettoriale di dimensione 3 senza essere linearmente indipendenti, assurdo.

(II) <u>Quattro valori critici $k = 4$:</u>

(a) Una famiglia doppiamente infinita: $\{2, 2, m, n\}$, $2 \leq m \leq n$; dove se $m = 2 \Rightarrow 3 \leq n$.

$$\left.\begin{array}{cc} \text{Se } G \text{ è abeliano,} & \\ \text{per il teorema 5.1.2} & \Rightarrow |G|\big|8 \\ \text{e inoltre} & 2\big||G| \end{array}\right\} \Rightarrow |G| \in \{2, 4, 8\}.$$

Per la formula di Riemann-Hurwitz otteniamo

$$2g_C - 2 = |G|\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right\}.$$

- Se $|G| = 2$ segue

$$2g_C = 3 - \frac{2}{n}, \text{ assurdo.}$$

- Se $|G| = 4$ segue

$$g_C = 2 - \frac{2}{n}, \text{ assurdo.}$$

- Se $|G| = 8$ segue

$$g_C = 3 - \frac{4}{n} \Rightarrow n = 4.$$

Quindi l'unico gruppo abeliano che riusciamo a trovare in questo caso è:
$G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ con $\{2, 2, 2, 4\}$ e $g_C = 2$, ma $m_4 = (a_4, b_4)$ non è mai di ordine 4 siccome b_4 può essere solo pari.

Andiamo dunque ad analizzare la famiglia doppiamente infinita $\{2, 2, m, n\}$, $3 \leq m \leq n$:
siccome G è abeliano $|G|\big|2 \cdot 2 \cdot m$, $|G|\big|2 \cdot 2 \cdot n$ e $|G|\big|2 \cdot m \cdot n$. Inoltre

$$\begin{array}{rcl} 2\big||G| & \Rightarrow & |G| = 2 \cdot \alpha \\ m\big||G| & \Rightarrow & |G| = m \cdot \beta \\ n\big||G| & \Rightarrow & |G| = n \cdot \gamma. \end{array}$$

Dunque

$$\begin{array}{lclcl} |G|\big|2 \cdot 2 \cdot m & \Rightarrow & m \cdot \beta\big|2 \cdot 2 \cdot m & \Rightarrow & \beta\big|4 \Rightarrow \beta \in \{1, 2, 4\} \\ |G|\big|2 \cdot 2 \cdot n & \Rightarrow & n \cdot \gamma\big|2 \cdot 2 \cdot n & \Rightarrow & \gamma\big|4 \Rightarrow \gamma \in \{1, 2, 4\} \\ |G|\big|2 \cdot m \cdot n & \Rightarrow & 2 \cdot \alpha\big|2 \cdot m \cdot n & \Rightarrow & \alpha\big|m \cdot n \\ & \Rightarrow & m \cdot \beta\big|2 \cdot m \cdot n & \Rightarrow & \beta\big|2 \cdot n \\ & \Rightarrow & n \cdot \gamma\big|2 \cdot m \cdot n & \Rightarrow & \gamma\big|2 \cdot m. \end{array}$$

- Se $\beta = 1$ allora abbiamo un'unica possibilità: $|G| = m = n$.
  Si ha dunque $\{2, 2, m, m\}$ con $|G| = m$. Per la formula di Riemann-Hurwitz si ottiene $m = 2g_C$, quindi $m \geq 4$ pari. Otteniamo il gruppo ciclico:

  $$G \cong \mathbb{Z}_{2g_C} \text{ con } \{2, 2, 2g_C, 2g_C\}.$$

  Vediamo un esempio che conferma l'esistenza del caso:

  $\psi(\gamma_1) = m_1 = g_C \in \mathbb{Z}_{2g_C}$ ha ordine 2
  $\psi(\gamma_2) = m_2 = g_C \in \mathbb{Z}_{2g_C}$ ha ordine 2
  $\psi(\gamma_3) = m_3 = 1 \in \mathbb{Z}_{2g_C}$ ha ordine $2g_C$
  allora
  $\psi(\gamma_4) = m_4 = -m_1 - m_2 - m_3 = -2g_C - 1$
  $\equiv -1 \mod (2g_C) \in \mathbb{Z}_{2g_C}$ ha ordine $2g_C$.

- Se $\beta = 2$ allora si hanno due possibilità:
  $|G| = 2m = n$ oppure $|G| = 2m = 2n$.

  - Nel primo caso abbiamo $|G| = 2m$ con $\{2, 2, m, 2m\}$; la formula di Riemann-Hurwitz ci porta ad un assurdo:

  $$m = \frac{2g_C + 1}{2}.$$

- Nel secondo caso invece $|G| = 2 \cdot m$ con $\{2, 2, m, m\}$ e otteniamo, osservando che per il teorema 5.5.1, se m è pari G non può essere ciclico, il caso

$$G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_m.$$

Dalla formula di Riemann-Hurwitz si ottiene $m = g_C + 1$, con gli indici di ramificazione $\{2, 2, g_C + 1, g_C + 1\}$. Riassumiamo il caso come segue:

$$G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{g_C+1} \text{ con } \{2, 2, g_C + 1, g_C + 1\} \text{ e } g_C \geq 2.$$

Vediamo un esempio che conferma l'esistenza del caso:

$\psi(\gamma_1) = m_1 = (1, 0) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{g_C+1}$ ha ordine 2
$\psi(\gamma_2) = m_2 = (1, 0) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{g_C+1}$ ha ordine 2
$\psi(\gamma_3) = m_3 = (0, 1) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{g_C+1}$ ha ordine $g_C + 1$
allora
$\psi(\gamma_4) = m_4 = -m_1 - m_2 - m_3 = (0, -1) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{g_C+1}$ ha ordine $g_C + 1$.

- Se $\beta = 4$ allora si hanno ben tre possibilità:
  o $|G| = 4m = n$,
  o $|G| = 4m = 2n \Rightarrow n = 2m$,
  oppure $|G| = 4m = 4n \Rightarrow m = n$.

  - Il primo caso non va bene perché la formula di Riemann-Hurwitz ci porta a $2g_C - 2 = 4m - 5$.

  - Il secondo caso è $|G| = 4m$ con $\{2, 2, m, 2m\}$. Dalla formula di Riemann-Hurwitz otteniamo:

$$m = \frac{g_C}{2} + 1 \Rightarrow g_C \geq 2 \text{ pari.}$$

Allora $|G| = 2g_C + 4$ con indici di ramificazione

$$\left\{2, 2, \frac{g_C}{2} + 1, g_C + 2\right\}.$$

Non può essere ciclico per il teorema 5.5.1. Si ha dunque seguente caso

$$G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{g_C+2} \text{ con } \left\{2, 2, \frac{g_C}{2} + 1, g_C + 2\right\}.$$

Si osserva inoltre che g_C deve essere pari ed escludiamo anche il caso di $m = \frac{g_C}{2} + 1 = 2$, ovvero $g_C = 2$, siccome già stiamo assumendo $m \geq 3$.

Quindi dimostriamo l'esistenza del seguente caso:
$G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{g_C+2}$, $\left\{2, 2, \frac{g_C}{2}+1, g_C+2\right\}$ con $g_C \geq 4$ pari.

Se $\frac{g_C+2}{2}$ è dispari possiamo dimostrare l'esistenza del caso facendo seguente esempio:

$\psi(\gamma_1) = m_1 = \left(1, \frac{g_C+2}{2}\right) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{g_C+2}$ ha ordine 2
$\psi(\gamma_2) = m_2 = (1, 0) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{g_C+2}$ ha ordine 2
$\psi(\gamma_3) = m_3 = (0, 2) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{g_C+2}$ ha ordine $\frac{g_C}{2}+1$
allora
$\psi(\gamma_4) = m_4 = -m_1 - m_2 - m_3 = \left(0, -\frac{g_C}{2} - 3\right)$
$\equiv \left(0, \frac{g_C}{2} - 1\right) \mod (g_C+2) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{g_C+2}$ ha ordine $g_C + 2$.

$\frac{g_C}{2} - 1$ ha ordine $g_C + 2$ grazie alla proposizione 5.5.2.

$$\operatorname{ord}\left(\frac{g_C}{2} - 1\right) = g_C + 2 \Longleftrightarrow \gcd\left(\frac{g_C}{2} - 1, g_C + 2\right) = 1.$$

Questo si verifica grazie all'algoritmo d'Euclide. Siccome $\frac{g_C+2}{2}$ è dispari, anche $\frac{g_C-2}{2}$ lo è.

$$g_C + 2 = 2\left(\frac{g_C}{2} - 1\right) + 4$$

$$\Rightarrow \gcd\left(g_C + 2, \frac{g_C}{2} - 1\right) = \gcd\left(\frac{g_C}{2} - 1, 4\right) = 1.$$

Se $\frac{g_C+2}{2}$ invece è pari non riusciamo a dimostrare l'esistenza del caso:

$\psi(\gamma_1) = m_1$ ha ordine 2, quindi $m_1 \in \mathbb{Z}_2 \times \left\{0, \frac{g_C+2}{2}\right\}$,
con $m_1 \neq (0, 0)$,
$\psi(\gamma_2) = m_2$ ha ordine 2, quindi $m_2 \in \mathbb{Z}_2 \times \left\{0, \frac{g_C+2}{2}\right\}$,
con $m_2 \neq (0, 0)$,
$\psi(\gamma_3) = m_3$ ha ordine $\frac{g_C+2}{2}$, quindi $m_3 \in \mathbb{Z}_2 \times \{\text{pari}\}$
allora
$\psi(\gamma_4) = m_4 = -m_1 - m_2 - m_3 = (a_4, b_4) \in \mathbb{Z}_2 \times \{\text{pari}\}$
non può avere ordine $g_C + 2$ siccome b_4 non è dispari.

- Il terzo ed ultimo caso è $|G| = 4m$ con $\{2, 2, m, m\}$.
Dalla formula di Riemann-Hurwitz otteniamo

$$m = \frac{g_C + 3}{2} \Rightarrow g_C \geq 3 \text{ dispari.}$$

Da questo segue $|G| = 2g_C + 6$ con

$$\left\{2, 2, \frac{g_C + 3}{2}, \frac{g_C + 3}{2}\right\}.$$

Escludiamo il caso del gruppo ciclico per il teorema 5.5.1.
Osserviamo che $\beta = 4$ e β deve dividere $2 \cdot n$. Allora

$$2 = \frac{\beta}{2} | n = m = \frac{g_C + 3}{2},$$

cioè $\frac{g_C + 3}{2}$ è pari, ovvero

$$\frac{g_C + 3}{2} = 2t.$$

Dalla formula di Riemann-Hurwitz, considerando gli indici di ramificazione $\{2, 2, 2t, 2t\}$ con $g_C = 4t - 3$, otteniamo

$$|G| = 8t.$$

Per il teorema di classificazione 5.1.3 abbiamo i casi

$$\begin{aligned} G &\cong \mathbb{Z}_{8t} \\ G &\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{4t} \\ G &\cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{2t} \\ G &\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2t}. \end{aligned}$$

Escludiamo il caso del gruppo ciclico per il teorema 5.5.1. Anche il secondo e terzo caso vengono esclusi, perché non hanno un insieme di generatori di ordini $\{2, 2, 2t, 2t\}$.
Rimane dunque il seguente caso

$$G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{\frac{g_C+3}{2}} \text{ con } \left\{2, 2, \frac{g_C + 3}{2}, \frac{g_C + 3}{2}\right\}$$

$$\text{e } g_C = 4t - 3, \quad \forall t \in \mathbb{Z}^{\geq 2}.$$

Dimostiamo l'esistenza facendo seguente esempio:

$\psi(\gamma_1) = m_1 = (1, 0, 0) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{\frac{g_C+3}{2}}$ ha ordine 2
$\psi(\gamma_2) = m_2 = (0, 1, 0) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{\frac{g_C+3}{2}}$ ha ordine 2
$\psi(\gamma_3) = m_3 = (0, 0, 1) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{\frac{g_C+3}{2}}$ ha ordine $\frac{g_C+3}{2}$
allora
$\psi(\gamma_4) = m_4 = -m_1 - m_2 - m_3 = (-1, -1, -1)$
$\in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{\frac{g_C+3}{2}}$ ha ordine $\frac{g_C+3}{2}$.

(b) Quattro famiglie infinite: $\{2, 3, a, n\}$, $3 \leq a \leq 6$ e $a \leq n$.

(i) $\{2,3,3,n\}$, $3 \leq n$

$$\left.\begin{array}{cc} \text{Se } G \text{ è abeliano,} & \\ \text{per il teorema 5.1.2} & \Rightarrow |G|\big|18 \\ \text{e inoltre} & 6\big||G| \end{array}\right\} \Rightarrow |G| \in \{6,18\}\,.$$

- Se $|G| = 6$, per il teorema di classificazione 5.1.3 abbiamo il caso ciclico $G \cong \mathbb{Z}_6$. Per la formula di Riemann-Hurwitz si ottiene

$$2g_C = 7 - \frac{6}{n};$$

l'unico caso possibile è $G \cong \mathbb{Z}_6$ con gli indici di ramificazione $\{2,3,3,6\}$ e $g_C = 3$. Il seguente esempio conferma la sua esistenza:

$\psi(\gamma_1) = m_1 = 3 \in \mathbb{Z}_6$ ha ordine 2
$\psi(\gamma_2) = m_2 = 2 \in \mathbb{Z}_6$ ha ordine 3
$\psi(\gamma_3) = m_3 = 2 \in \mathbb{Z}_6$ ha ordine 3
allora
$\psi(\gamma_5) = m_4 = -m_1 - m_2 - m_3 = 1 \in \mathbb{Z}_6$ ha ordine 6.

- Se $|G| = 18$, per la formula di Riemann-Hurwitz si ottiene

$$2g_C = 17 - \frac{18}{n},$$

da cui $n = 6, 18$ con $g_C = 7, 8$. Per il teorema di classificazione 5.1.3 abbiamo

$$\begin{aligned} G &\cong \mathbb{Z}_{18} \\ G &\cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6. \end{aligned}$$

Il caso ciclico viene escluso per il teorema 5.5.1, inoltre $G \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$ non ha elementi di ordine 18. L'unico caso possibile dunque è $G \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$ con gli indici di ramificazione $\{2,3,3,3\}$ e $g_C = 7$; il seguente esempio conferma la sua esistenza:

$\psi(\gamma_1) = m_1 = (0,3) \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$ ha ordine 2
$\psi(\gamma_2) = m_2 = (1,0) \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$ ha ordine 3
$\psi(\gamma_3) = m_3 = (1,2) \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$ ha ordine 3
allora
$\psi(\gamma_4) = m_4 = -m_1 - m_2 - m_3 = (1,1) \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$
ha ordine 6.

(ii) $\{2,3,4,n\}$, $4 \leq n$

$$\left.\begin{array}{cc} \text{Se } G \text{ è abeliano,} & \\ \text{per il teorema 5.1.2} & \Rightarrow |G|\big|24 \\ \text{e inoltre} & 12\big||G| \end{array}\right\} \Rightarrow |G| \in \{12,24\}\,.$$

- Se $|G| = 12$, per il teorema di classificazione 5.1.3 abbiamo i due casi

$$\begin{aligned} G &\cong \mathbb{Z}_{12} \\ G &\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6. \end{aligned}$$

Per la formula di Riemann-Hurwitz si ottiene

$$2g_C = 13 - \frac{12}{n};$$

gli unici due casi possibili sono $n = 4, 12$, con rispettivamente $g_C = 5, 6$. Escludiamo il caso del gruppo non ciclico $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$ siccome non ha elementi di ordine 4. Si ha dunque il caso del gruppo ciclico:

$$\begin{array}{ccc} G \cong \mathbb{Z}_{12} & \text{con} & \{2,3,4,4\} \text{ e } g_C = 5 \\ \text{oppure} & \text{con} & \{2,3,4,12\} \text{ e } g_C = 6. \end{array}$$

Dimostriamo l'esistenza del secondo caso:
$G \cong \mathbb{Z}_{12}$ con $\{2, 3, 4, 12\}$ e $g_C = 6$:

$\psi : \gamma_1 \longmapsto m_1 = 6 \in \mathbb{Z}_{12}$ ha ordine 2
$\psi : \gamma_2 \longmapsto m_2 = 4 \in \mathbb{Z}_{12}$ ha ordine 3
$\psi : \gamma_3 \longmapsto m_3 = 3 \in \mathbb{Z}_{12}$ ha ordine 4
$\psi : \gamma_4 \longmapsto m_4 = -m_1 - m_2 - m_3 = 11 \in \mathbb{Z}_{12}$
ha ordine 12.

Osserviamo invece che m_4 non può avere ordine 4:

$\psi(\gamma_1) = m_1$ ha ordine 2, quindi $m_1 \in \{6\} \subset \mathbb{Z}_{12}$
$\psi(\gamma_2) = m_2$ ha ordine 3, quindi $m_2 \in \{4, 8\} \subset \mathbb{Z}_{12}$
$\psi(\gamma_3) = m_3$ ha ordine 4, quindi $m_3 \in \{3, 9\} \subset \mathbb{Z}_{12}$
allora
$\psi(\gamma_4) = m_4 = -m_1 - m_2 - m_3 \in \{1, 5, 7, 11\} \subset \mathbb{Z}_{12}$
non ha ordine 4.

Dunque il caso del gruppo ciclico $\mathbb{Z}_{12}$ con gli indici di ramificazione $\{2, 3, 4, 4\}$ non esiste.

- Se $|G| = 24$, per il teorema di classificazione 5.1.3 abbiamo i tre casi

$$\begin{aligned} G &\cong \mathbb{Z}_{24} \\ G &\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12} \\ G &\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6. \end{aligned}$$

Per la formula di Riemann-Hurwitz otteniamo

$$g_C = 12 - \frac{12}{n};$$

gli unici casi possibili sono $n = 4, 6, 12$, con rispettivamente $g_C = 9, 10, 11$.
Escludiamo il caso ciclico per il teorema 5.5.1 e il caso $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$, perché non ha elementi di ordine 4.
Osserviamo che il gruppo abeliano $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12}$ può essere generato da elementi di ordini $\{2, 3, 4, 4\}$, $\{2, 3, 4, 6\}$ oppure di ordini $\{2, 3, 4, 12\}$ e $g_C = 9, 10, 11$ rispettivamente.
Dimostriamo che i primi due non esistono:

$\psi(\gamma_1) = m_1$ ha ordine 2, quindi $m_1 \in \mathbb{Z}_2 \times \{0, 6\} \subset \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12}$ con $m_1 \neq (0, 0)$
$\psi(\gamma_2) = m_2$ ha ordine 3, quindi $m_2 \in \{0\} \times \{4, 8\} \subset \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12}$
$\psi(\gamma_3) = m_3$ ha ordine 4, quindi $m_3 \in \mathbb{Z}_2 \times \{3, 9\} \subset \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12}$
allora
$\psi(\gamma_4) = m_4 = -m_1 - m_2 - m_3 = (a_4, b_4) \in \mathbb{Z}_2 \times \{1, 5, 7, 11\} \subset \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12}$ non ha né ordine 4 né ordine 6.

Dimostriamo invece l'esistenza del caso

$$G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12} \text{ con } \{2, 3, 4, 12\} \text{ e } g_C = 11:$$

$\psi(\gamma_1) = m_1 = (1, 0) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12}$ ha ordine 2
$\psi(\gamma_2) = m_2 = (0, 8) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12}$ ha ordine 3
$\psi(\gamma_3) = m_3 = (1, 3) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12}$ ha ordine 4
allora
$\psi(\gamma_4) = m_4 = -m_1 - m_2 - m_3 = (0, 1) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12}$ ha ordine 12.

(iii) $\{2, 3, 5, n\}$, $5 \leq n$

$$\left.\begin{array}{cc} \text{Se } G \text{ è abeliano,} & \\ \text{per il teorema 5.1.2} & \Rightarrow |G| \big| 30 \\ \text{e inoltre} & 30 \big| |G| \end{array}\right\} \Rightarrow |G| = 30.$$

L'unico gruppo abeliano di ordine 30 è quello ciclico $G \cong \mathbb{Z}_{30}$. Per la formula di Riemann-Hurwitz otteniamo

$$2g_C = 31 - \frac{30}{n},$$

quindi $n = 6, 10, 30$ con $g_C = 13, 14, 15$.
Quattro elementi di ordini $\{2, 3, 5, 6\}$ oppure $\{2, 3, 5, 10\}$ non

possono generare il gruppo ciclico $G \cong \mathbb{Z}_{30}$ per il teorema 5.5.1. Rimane il caso

$$G \cong \mathbb{Z}_{30} \text{ con } \{2,3,5,30\} \text{ e } g_C = 15:$$

$\psi(\gamma_1) = m_1 = 15 \in \mathbb{Z}_{30}$ ha ordine 2
$\psi(\gamma_2) = m_2 = 10 \in \mathbb{Z}_{30}$ ha ordine 3
$\psi(\gamma_3) = m_3 = 6 \in \mathbb{Z}_{30}$ ha ordine 5
allora
$\psi(\gamma_4) = m_4 = -m_1 - m_2 - m_3 = 29 \in \mathbb{Z}_{30}$ ha ordine 30.

(iv) $\{2,3,6,n\}$, $6 \leq n$

$$\left.\begin{array}{cc} \text{Se } G \text{ è abeliano,} & \\ \text{per il teorema 5.1.2} & \Rightarrow |G|\big|36 \\ \text{e inoltre} & 6\big||G| \end{array}\right\} \Rightarrow |G| \in \{6,12,18,36\}.$$

- Se $|G| = 6$ per la formula di Riemann-Hurwitz otteniamo $g_C = 4 - \dfrac{3}{n}$. $\nexists n \geq 6$, tale che $g_C \in \mathbb{Z}^{\geq 2}$, assurdo.

- Se $|G| = 12$, per la formula di Riemann-Hurwitz otteniamo:

$$g_C = 7 - \frac{6}{n}.$$

L'unica possibilità è $n = 6$ con $g_C = 6$. Escludiamo il caso ciclico per il teorema 5.5.1. Rimane l'unico caso esistente

$$G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6 \text{ con } \{2,3,6,6\} \text{ e } g_C = 6:$$

$\psi(\gamma_1) = m_1 = (1,0) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$ ha ordine 2
$\psi(\gamma_2) = m_2 = (0,2) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$ ha ordine 3
$\psi(\gamma_3) = m_3 = (0,5) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$ ha ordine 6
allora
$\psi(\gamma_4) = m_4 = -m_1 - m_2 - m_3 = (1,5) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$
ha ordine 6.

- Se $|G| = 18$, per il teorema di classificazione 5.1.3

$$\begin{aligned} G &\cong \mathbb{Z}_{18} \\ G &\cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6. \end{aligned}$$

Per il teorema di Riemann-Hurwitz otteniamo

$$g_C = 10 - \frac{9}{n}.$$

L'unica possibilità è $n = 9$, ovvero gli indici di ramificazione sono $\{2,3,6,9\}$. Osserviamo che il caso ciclico viene escluso

per il teorema 5.5.1 ed il gruppo abeliano non ciclico non ha alcun elemento di ordine 9, assurdo.
- Se $|G| = 36$, per il teorema di classificazione 5.1.3

$$\begin{aligned} G &\cong \mathbb{Z}_{36} \\ G &\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{18} \\ G &\cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{12} \\ G &\cong \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6. \end{aligned}$$

Per la formula di Riemann-Hurwitz otteniamo

$$g_C = 19 - \frac{18}{n}$$

dunque $n = 6, 9, 18$ con $g_C = 16, 17, 18$ rispettivamente.
Escludiamo il gruppo ciclico per il teorema 5.5.1. Notiamo che $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{18}$ e $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{12}$ non vengono generati da un insieme di elementi di ordini $\{2, 3, 6, 6\}$. I gruppi $G \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{12}$ e $G \cong \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$ non hanno elementi di ordine 9 oppure 18.
I possibili casi restanti sono i seguenti:

$$\begin{aligned} G &\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{18} \text{ con } \{2,3,6,9\} \text{ e } g_C = 17 \\ G &\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{18} \text{ con } \{2,3,6,18\} \text{ e } g_C = 18 \\ G &\cong \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6 \text{ con } \{2,3,6,6\} \text{ e } g_C = 16. \end{aligned}$$

I primi due casi non esistono:

$\psi(\gamma_1) = m_1$ ha ordine 2, quindi $m_1 \in \mathbb{Z}_2 \times \{0, 9\}$
$\psi(\gamma_2) = m_2$ ha ordine 3, quindi $m_2 \in \{0\} \times \{6, 12\}$
$\psi(\gamma_3) = m_3$ ha ordine 6, quindi $m_3 \in \mathbb{Z}_2 \times \{3, 15\}$
allora
$\psi(\gamma_4) = m_4 = -m_1 - m_2 - m_3 = (a_4, b_4)$
$\in \mathbb{Z}_2 \times \{0, 3, 6, 9, 12, 15\}$
non può avere ordine 9 oppure 18, perché $3 \big| b_4$.

Il seguente esempio ci assicura l'esistenza del terzo caso:

$\psi(\gamma_1) = m_1 = (3, 0) \in \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$ ha ordine 2
$\psi(\gamma_2) = m_2 = (2, 4) \in \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$ ha ordine 3
$\psi(\gamma_3) = m_3 = (1, 1) \in \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$ ha ordine 6
allora
$\psi(\gamma_4) = m_4 = -m_1 - m_2 - m_3 = (0, 1) \in \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$
ha ordine 6.

(c) 35 casi: $\{2, 3, 7, a\}$, $7 \leq a \leq 41$.

$$\left.\begin{array}{cc} \text{Se } G \text{ è abeliano,} & \\ \text{per il teorema 5.1.2} & \Rightarrow |G| \big| 42 \\ \text{e inoltre} & 42 \big| |G| \end{array}\right\} \Rightarrow |G| = 42.$$

Per il teorema di classificazione 5.1.3 risulta come unico caso il gruppo ciclico $G \cong \mathbb{Z}_{42}$.
Dalla formula di Riemann-Hurwitz otteniamo:

$$2g_C = 45 - \frac{42}{a},$$

da cui segue $a = 14$ con $g_C = 21$. Dal teorema 5.5.1 il caso del gruppo ciclico viene escluso.

(d) 16 casi: $\{2,3,8,a\}$, $8 \leq a \leq 23$.

$$\left.\begin{array}{cr} \text{Se } G \text{ è abeliano,} & \\ \text{per il teorema 5.1.2} & \Rightarrow |G|\big||48 \\ \text{e inoltre} & 24\big||G| \end{array}\right\} \Rightarrow |G| \in \{24, 48\}\,.$$

- Se $|G| = 24$, per il teorema di classificazione 5.1.3 si ha

$$\begin{array}{rcl} G & \cong & \mathbb{Z}_{24} \\ G & \cong & \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12} \\ G & \cong & \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6. \end{array}$$

Per la formula di Riemann-Hurwitz

$$2g_C = 27 - \frac{24}{a},$$

da cui segue $a = 8$ con $g_C = 12$.
Siccome serve un elemento di ordine 8, l'unico caso che può verificarsi è quello ciclico

$$G \cong \mathbb{Z}_{24} \text{ con } \{2,3,8,8\} \text{ e } g_C = 12,$$

ma dimostriamo che non esiste:

$\psi(\gamma_1) = m_1$ ha ordine 2, quindi $m_1 \in \{12\} \subset \mathbb{Z}_{24}$
$\psi(\gamma_2) = m_2$ ha ordine 3, quindi $m_2 \in \{8, 16\} \subset \mathbb{Z}_{24}$
$\psi(\gamma_3) = m_3$ ha ordine 5, quindi $m_3 \in \{3, 9, 15, 21\} \subset \mathbb{Z}_{24}$
allora
$\psi(\gamma_4) = m_4 = -m_1 - m_2 - m_3 \in \{1,5,7,11,13,17,19,23\} \subset \mathbb{Z}_{24}$
non ha ordine 8.

- Se $|G| = 48$, per il teorema di classificazione 5.1.3 si ha

$$\begin{array}{rcl} G & \cong & \mathbb{Z}_{48} \\ G & \cong & \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{24} \\ G & \cong & \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12} \\ G & \cong & \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12} \\ G & \cong & \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6. \end{array}$$

Per la formula di Riemann-Hurwitz

$$g_C = 26 - \frac{24}{a}$$

segue $a = 8, 12$ con $g_C = 23, 24$ rispettivamente.
Escludiamo innanzitutto il caso ciclico per il teorema 5.5.1. Escludiamo anche gli ultimi tre casi siccome non hanno elementi di ordine 8.
Possono verificarsi dunque i seguente casi

$$\begin{array}{lll} G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{24} & \text{con} & \{2,3,8,8\} \text{ e } g_C = 23 \\ G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{24} & \text{con} & \{2,3,8,12\} \text{ e } g_C = 24. \end{array}$$

Si dimostra l'inesistenza dei due casi:

$\psi(\gamma_1) = m_1$ ha ordine 2, quindi $m_1 \in \mathbb{Z}_2 \times \{0, 12\}$,
con $m_1 \neq (0,0)$,
$\psi(\gamma_2) = m_2$ ha ordine 3, quindi $m_2 \in \{0\} \times \{8, 16\}$
$\psi(\gamma_3) = m_3$ ha ordine 8, quindi $m_3 \in \mathbb{Z}_2 \times \{3, 9, 15, 21\}$
allora
$\psi(\gamma_4) = m_4 = -m_1 - m_2 - m_3 \in \mathbb{Z}_2 \times \{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$
non ha nè ordine 8 né ordine 12.

(e) 9 casi: $\{2, 3, 9, a\}$, $9 \leq a \leq 17$.

$$\left.\begin{array}{cr} \text{Se } G \text{ è abeliano,} & \\ \text{per il teorema 5.1.2} & \Rightarrow |G|\big||54 \\ \text{e inoltre} & 18\big||G| \end{array}\right\} \Rightarrow |G| \in \{18, 54\}.$$

- Se $|G| = 18$, per la formula di Riemann-Hurwitz otteniamo

$$2g_C = 21 - \frac{18}{a}.$$

- Se $|G| = 54$, per la formula di Riemann-Hurwitz otteniamo

$$2g_C = 59 - \frac{54}{a}.$$

In entrambi casi non riusciamo a trovare alcun $9 \leq a \leq 17$, tale che $g_C \in \mathbb{Z}^{\geq 2}$.

(f) 5 casi: $\{2, 3, 10, a\}$, $10 \leq a \leq 14$

$$\left.\begin{array}{cr} \text{Se } G \text{ è abeliano,} & \\ \text{per il teorema 5.1.2} & \Rightarrow |G|\big||60 \\ \text{e inoltre} & 30\big||G| \end{array}\right\} \Rightarrow |G| \in \{30, 60\}.$$

- Se $|G| = 30$, per la formula di Riemann-Hurwitz otteniamo

$$g_C = 17 - \frac{15}{a}.$$

Non riusciamo a trovare alcun $10 \leq a \leq 14$ che divide 15.
- Se $|G| = 60$, per la formula di Riemann-Hurwitz otteniamo

$$g_C = 33 - \frac{30}{a}.$$

Allora $a = 10$ con $g_C = 30$ e gli indici di ramificazione sono $\{2, 3, 10, 10\}$. Per il teorema di classificazione 5.1.3

$$\begin{array}{rcl} G & \cong & \mathbb{Z}_{60} \\ G & \cong & \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{30}. \end{array}$$

Escludiamo il caso del gruppo ciclico per teorema 5.5.1.
L'unico caso possibile è

$$G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{30} \text{ con } \{2, 3, 10, 10\} \text{ e } g_C = 30,$$

ma si dimostra che non esiste:

$\psi(\gamma_1) = m_1$ ha ordine 2, quindi $m_1 \in \mathbb{Z}_2 \times \{0, 15\}$,
con $m_1 \neq (0, 0)$,
$\psi(\gamma_2) = m_2$ ha ordine 3, quindi $m_2 \in \{0\} \times \{10, 20\}$
$\psi(\gamma_3) = m_3$ ha ordine 10, quindi $m_3 \in \mathbb{Z}_2 \times \{3, 9, 21, 27\}$
allora
$\psi(\gamma_4) = m_4 = -m_1 - m_2 - m_3$
$\in \mathbb{Z}_2 \times \{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 22, 23, 26, 28, 29\}$
non ha ordine 10.

(g) 3 casi: $\{2, 3, 11, a\}$, $11 \leq a \leq 13$

$$\left.\begin{array}{cr} \text{Se } G \text{ è abeliano,} & \\ \text{per il teorema 5.1.2} & \Rightarrow |G|\big|66 \\ \text{e inoltre} & 66\big||G| \end{array}\right\} \Rightarrow |G| = 66$$

Per la formula di Riemann-Hurwitz otteniamo

$$2g_C = 73 - \frac{66}{a},$$

ma non riusciamo a trovare alcun $11 \leq a \leq 13$, tale che $g_C \in \mathbb{Z}^{\geq 2}$.

(h) caso infinito: $\{2, 4, 4, n\}$, $4 \leq n$

$$\left.\begin{array}{cr} \text{Se } G \text{ è abeliano,} & \\ \text{per il teorema 5.1.2} & \Rightarrow |G|\big|32 \\ \text{e inoltre} & 4\big||G| \end{array}\right\} \Rightarrow |G| \in \{4, 8, 16, 32\}.$$

- Se $|G| = 4$, per la formula di Riemann-Hurwitz possiamo dire che non troviamo alcun $n \geq 4$, tale che $g_C \in \mathbb{Z}^{\geq 2}$, siccome

$$g_C = 3 - \frac{2}{n}.$$

- Se $|G| = 8$, per la formula di Riemann-Hurwitz otteniamo

$$g_C = 5 - \frac{4}{n}$$

e dunque $n = 4$ con $g_C = 4$. Gli indici di ramificazione sono $\{2, 4, 4, 4\}$. Per il teorema di classificazione 5.1.3 si ha

$$\begin{aligned} G &\cong \mathbb{Z}_8 \\ G &\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \\ G &\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2. \end{aligned}$$

Escludiamo il caso ciclico per il teorema 5.5.1 ed escludiamo il terzo caso siccome non ha elementi di ordine 4.
L'unico caso possibile è

$$G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \text{ con } \{2, 4, 4, 4\} \text{ e } g_C = 4,$$

ma si dimostra che non esiste:

$\psi(\gamma_1) = m_1$ ha ordine 2, quindi $m_1 \in \mathbb{Z}_2 \times \{0, 2\}$,
con $m_1 \neq (0, 0)$,
$\psi(\gamma_2) = m_2$ ha ordine 4, quindi $m_2 \in \mathbb{Z}_2 \times \{1, 3\}$
$\psi(\gamma_3) = m_3$ ha ordine 4, quindi $m_3 \in \mathbb{Z}_2 \times \{1, 3\}$
allora
$\psi(\gamma_4) = m_4 = -m_1 - m_2 - m_3 \in \mathbb{Z}_2 \times \{0, 2\}$
non può avere ordine 4, siccome b_4 è pari.

- Se $|G| = 16$, per la formula di Riemann-Hurwitz otteniamo

$$g_C = 9 - \frac{8}{n}$$

e dunque $n = 4, 8$ con $g_C = 7, 8$ rispettivamente. Per il teorema di classificazione 5.1.3 si ha

$$\begin{aligned} G &\cong \mathbb{Z}_{16} \\ G &\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8 \\ G &\cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 \\ G &\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \\ G &\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2. \end{aligned}$$

Escludiamo il caso ciclico per il teorema 5.5.1 ed escludiamo il quinto caso, siccome non ha elementi né di ordine 4, nè di ordine 8. Il gruppo $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8$ non viene generato da elementi di ordini $\{2, 4, 4, 4\}$. Il terzo e quarto gruppo non ha elementi di ordine 8. Gli unici casi possibili sono

$$\begin{aligned} G &\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8 \text{ con } \{2,4,4,8\} \text{ e } g_C = 8 \\ G &\cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 \text{ con } \{2,4,4,4\} \text{ e } g_C = 7 \\ G &\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \text{ con } \{2,4,4,4\} \text{ e } g_C = 7. \end{aligned}$$

Si può dimostrare che il primo caso non esiste:

$$\begin{array}{l} \psi(\gamma_1) = m_1 \text{ ha ordine 2, quindi } m_1 \in \mathbb{Z}_2 \times \{0,4\}, \\ \text{con } m_1 \neq (0,0), \\ \psi(\gamma_2) = m_2 \text{ ha ordine 4, quindi } m_2 \in \mathbb{Z}_2 \times \{2,6\} \\ \psi(\gamma_3) = m_3 \text{ ha ordine 4, quindi } m_3 \in \mathbb{Z}_2 \times \{2,6\} \\ \text{allora} \\ \psi(\gamma_4) = m_4 = -m_1 - m_2 - m_3 \in \mathbb{Z}_2 \times \{0,2,4\} \\ \text{non può avere ordine 8, siccome } b_3 \text{ è pari.} \end{array}$$

Il seguente esempio conferma l'esistenza del secondo caso:

$$\begin{array}{l} \psi(\gamma_1) = m_1 = (2,0) \in \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 \text{ ha ordine 2} \\ \psi(\gamma_2) = m_2 = (0,1) \in \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 \text{ ha ordine 4} \\ \psi(\gamma_3) = m_3 = (1,1) \in \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 \text{ ha ordine 4} \\ \text{allora} \\ \psi(\gamma_4) = m_4 = -m_1 - m_2 - m_3 = (1,2) \in \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 \text{ ha ordine 4.} \end{array}$$

Il terzo caso non esiste:

$$\begin{array}{l} \psi(\gamma_1) = m_1 \text{ ha ordine 2, quindi } m_1 \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \{0,2\}, \\ \text{con } m_1 \neq (0,0), \\ \psi(\gamma_2) = m_2 \text{ ha ordine 4, quindi } m_2 \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \{1,3\} \\ \psi(\gamma_3) = m_3 \text{ ha ordine 4, quindi } m_3 \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \{1,3\} \\ \text{allora} \\ \psi(\gamma_4) = m_4 = -m_1 - m_2 - m_3 \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \{0,2\} \\ \text{non può avere ordine 4, siccome } b_4 \text{ è pari.} \end{array}$$

- Se $|G| = 32$, per la formula di Riemann-Hurwitz otteniamo

$$g_C = 17 - \frac{16}{n}$$

e dunque $n = 4, 8, 16$ con $g_C = 13, 15, 16$ rispettivamente. Per il teorema di classificazione 5.1.3 si ha

$$\begin{array}{ll}
1.) & G \cong \mathbb{Z}_{32} \\
2.) & G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{16} \\
3.) & G \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_8 \\
4.) & G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8 \\
5.) & G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 \\
6.) & G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \\
7.) & G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.
\end{array}$$

Escludiamo il caso ciclico per il teorema 5.5.1 ed escludiamo anche l'ultimo caso siccome non ha elementi di ordine $4, 8$ o 16.
Un insieme di elementi di ordini $\{2, 4, 4, 4\}$ non genera i casi 2.), 3.) e 4.); il secondo gruppo non può essere generato da un insieme di elementi di ordini $\{2, 4, 4, 8\}$. I gruppi 5.) e 6.) non hanno elementi di ordine 8 e i gruppi dal 3.) a 6.) non hanno elementi di ordine 16.
I casi possibili sono:

$$\begin{array}{lcl}
G & \cong & \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{16} \text{ con } \{2, 4, 4, 16\} \text{ e } g_C = 16 \\
G & \cong & \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_8 \text{ con } \{2, 4, 4, 8\} \text{ e } g_C = 15 \\
G & \cong & \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8 \text{ con } \{2, 4, 4, 8\} \text{ e } g_C = 15 \\
G & \cong & \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 \text{ con } \{2, 4, 4, 4\} \text{ e } g_C = 13 \\
G & \cong & \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \text{ con } \{2, 4, 4, 4\} \text{ e } g_C = 13.
\end{array}$$

Tra i cinque casi trovati, l'unico che esiste è il penultimo:
$G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{16}$ $\{2, 4, 4, 16\}$:

$\psi(\gamma_1) = m_1$ ha ordine 2, quindi $m_1 \in \mathbb{Z}_2 \times \{0, 8\}$,
con $m_1 \neq (0, 0)$,
$\psi(\gamma_2) = m_2$ ha ordine 4, quindi $m_2 \in \mathbb{Z}_2 \times \{4, 12\}$
$\psi(\gamma_3) = m_3$ ha ordine 4, quindi $m_3 \in \mathbb{Z}_2 \times \{4, 12\}$
allora
$\psi(\gamma_4) = m_4 = -m_1 - m_2 - m_3 = (a_4, b_4) \in \mathbb{Z}_2 \times \{0, 8\}$
non può avere ordine 16 siccome b_4 è pari.

$G \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_8 \qquad\qquad \{2,4,4,8\}:$

$\psi(\gamma_1) = m_1$ ha ordine 2, quindi $m_1 \in \{0,2\} \times \{0,4\}$,
con $m_1 \neq (0,0)$,
$\psi(\gamma_2) = m_2$ ha ordine 4, quindi $m_2 \in \{0,1,3\} \times \{0,2,6\}$,
con $m_2 \neq (0,0)$,
$\psi(\gamma_3) = m_3$ ha ordine 4, quindi $m_3 \in \{0,1,3\} \times \{0,2,6\}$,
con $m_3 \neq (0,0)$,
allora
$\psi(\gamma_4) = m_4 = -m_1 - m_2 - m_3 = (a_4, b_4) \in \mathbb{Z}_4 \times \{0,2,4,6\}$
non può avere ordine 8 siccome b_4 è pari.

$G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8 \qquad \{2,4,4,8\}:$
Anche in questo caso non riusciamo a trovare c_4 dispari e dunque m_4 non ha ordine 8.

$G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 \qquad \{2,4,4,4\}:$
Il seguente esempio ci assicura l'esistenza del caso:

$\psi(\gamma_1) = m_1 = (1,0,0) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ ha ordine 2
$\psi(\gamma_2) = m_2 = (0,1,0) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ ha ordine 4
$\psi(\gamma_3) = m_3 = (0,0,1) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ ha ordine 2
allora
$\psi(\gamma_4) = m_4 = -m_1 - m_2 - m_3 = (1,3,3) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$
ha ordine 4.

$G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \quad \{2,4,4,4\}:$
Siccome d_1 deve essere o 0 oppure 2, e $d_2, d_3 \neq 0$ e dispari, non riusciamo a trovare d_4 dispari e dunque m_4 non ha ordine 4.

(i) 15 casi: $\{2,4,5,a\}$, $5 \leq a \leq 19$

$$\left.\begin{array}{cc} \text{Se } G \text{ è abeliano,} & \\ \text{per il teorema 5.1.2} & \Rightarrow |G| \big| 40 \\ \text{e inoltre} & 20 \big| |G| \end{array}\right\} \Rightarrow |G| \in \{20,40\}.$$

- Se $|G| = 20$, per la formula di Riemann-Hurwitz otteniamo

$$2g_C = 23 - \frac{20}{a};$$

non riusciamo a trovare alcun $5 \leq a \leq 19$, tale che $g_C \in \mathbb{Z}^{\geq 2}$.
- Se $|G| = 40$, per la formula di Riemann-Hurwitz otteniamo

$$g_C = 22 - \frac{20}{a},$$

da cui $a = 5, 10$ con $g_C = 18, 20$ rispettivamente. Abbiamo così due casi di indici di ramificazione: $\{2, 4, 5, 5\}$ e $\{2, 4, 5, 10\}$.
Per il teorema di classificazione 5.1.3:

$$\begin{array}{rcl} G & \cong & \mathbb{Z}_{40} \\ G & \cong & \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{20} \\ G & \cong & \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{10}. \end{array}$$

Il primo caso viene escluso per il teorema 5.5.1; l'ultimo viene escluso siccome non ha elementi di ordine 4.
Rimane il caso

$$\begin{array}{rcl} G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{20} & \text{con} & \{2, 4, 5, 5\} \text{ e } g_C = 18 \\ \text{oppure} & \text{con} & \{2, 4, 5, 10\} \text{ e } g_C = 20. \end{array}$$

Possiamo dimostrare che non esiste:

$\psi(\gamma_1) = m_1$ ha ordine 2, quindi $m_1 \in \mathbb{Z}_2 \times \{0, 10\}$,
con $m_1 \neq (0, 0)$,
$\psi(\gamma_2) = m_2$ ha ordine 4, quindi $m_2 \in \mathbb{Z}_2 \times \{5, 15\}$
$\psi(\gamma_3) = m_3$ ha ordine 5, quindi $m_3 \in \mathbb{Z}_2 \times \{4, 8, 12, 16\}$
allora
$\psi(\gamma_4) = m_4 = -m_1 - m_2 - m_3 = (a_4, b_4) \in \mathbb{Z}_2 \times \{\text{dispari}\}$
ha né ordine 5, né ordine 10, perché b_4 è dispari.

(j) 6 casi: $\{2, 4, 6, a\}$, $6 \leq a \leq 11$.

$$\left.\begin{array}{cc} \text{Se } G \text{ è abeliano,} & \\ \text{per il teorema 5.1.2} & \Rightarrow |G|\big|48 \\ \text{e inoltre} & 12\big||G| \end{array}\right\} \Rightarrow |G| \in \{12, 24, 48\}.$$

- Se $|G| = 12$, per la formula di Riemann-Hurwitz otteniamo

$$2g_C = 15 - \frac{12}{a};$$

non riusciamo a trovare alcun $6 \leq a \leq 11$, tale che $g_C \in \mathbb{Z}^{\geq 2}$.
- Se $|G| = 24$, per la formula di Riemann-Hurwitz si ha

$$g_C = 14 - \frac{12}{a},$$

da cui segue $a = 6$ con $g_C = 12$ e gli indici di ramificazione dunque sono $\{2, 4, 6, 6\}$.
Per il teorema di classificazione 5.1.3 si hanno i casi

$$\begin{array}{rcl} G & \cong & \mathbb{Z}_{24} \\ G & \cong & \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12} \\ G & \cong & \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6. \end{array}$$

Il primo caso viene escluso per il teorema 5.5.1; l'ultimo viene escluso siccome non ha elementi di ordine 4.
Rimane il caso

$$G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12} \quad \text{con} \quad \{2,4,6,6\} \text{ e } g_C = 12.$$

Dimostriamo che non esiste:

$\psi(\gamma_1) = m_1$ ha ordine $2,$ quindi $m_1 \in \mathbb{Z}_2 \times \{0,6\}\,,$
con $m_1 \neq (0,0),$
$\psi(\gamma_2) = m_2$ ha ordine $4,$ quindi $m_2 \in \mathbb{Z}_2 \times \{3,9\}$
$\psi(\gamma_3) = m_3$ ha ordine $6,$ quindi $m_1 \in \mathbb{Z}_2 \times \{2,10\}$
allora
$\psi(\gamma_4) = m_4 = -m_1 - m_2 - m_3 = (a_4, b_4) \in \mathbb{Z}_2 \times \{\text{dispari}\}$
non può avere ordine $6,$ siccome b_4 è dispari.

- Se $|G| = 48$, per la formula di Riemann-Hurwitz

$$g_C = 27 - \frac{24}{a},$$

da cui segue $a = 6, 8$ con $g_C = 23, 24$ e gli indici di ramificazione sono $\{2,4,6,6\}$ e $\{2,4,6,8\}$.
Per il teorema di classificazione 5.5.1

$$\begin{aligned} G &\cong \mathbb{Z}_{48} \\ G &\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{24} \\ G &\cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12} \\ G &\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12} \\ G &\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6. \end{aligned}$$

Il primo caso viene escluso per il teorema 5.5.1; il secondo non ha un insieme di generatori di ordini $\{2,4,6,6\}$; l'ultimo viene escluso siccome non ha elementi di ordine 4 o 8. Il terzo e quarto caso non hanno elementi di ordine 8.
Dimostriamo che i casi possibili restanti non esistono:

$$\begin{aligned} G &\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{24} \text{ con } \{2,4,6,8\} \text{ e } g_C = 24 \\ G &\cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12} \text{ con } \{2,4,6,6\} \text{ e } g_C = 23 \\ G &\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12} \text{ con } \{2,4,6,6\} \text{ e } g_C = 23. \end{aligned}$$

$G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{24}$ con $\{2,4,6,8\}$ e $g_C = 24:$

$\psi(\gamma_1) = m_1$ ha ordine $2,$ quindi $m_1 \in \mathbb{Z}_2 \times \{0,12\}\,,$
con $m_1 \neq (0,0),$
$\psi(\gamma_2) = m_2$ ha ordine $4,$ quindi $m_2 \in \{0\} \times \{6,18\}$
$\psi(\gamma_3) = m_3$ ha ordine $6,$ quindi $m_1 \in \{0\} \times \{4,16,20\}$
allora
$\psi(\gamma_4) = m_4 = -m_1 - m_2 - m_3 \in \{0\} \times \{\text{ pari }\}$
non può avere ordine $8,$ siccome b_4 non è dispari.

$G \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12}$ con $\{2,4,6,6\}$ e $g_C = 23$:

$\psi(\gamma_1) = m_1$ ha ordine 2, quindi $m_1 \in \{0,2\} \times \{0,6\}$
con $m_1 \neq (0,0)$,
$\psi(\gamma_2) = m_2$ ha ordine 4, quindi $m_2 \in \{0,1,3\} \times \{0,3,9\}$,
con $m_2 \neq (0,0)$,
$\psi(\gamma_3) = m_3$ ha ordine 6, quindi $m_1 \in \{0,2\} \times \{2,8,10\}$
allora
$\psi(\gamma_4) = m_4 = -m_1 - m_2 - m_3 \in \{1,3\} \times \{2,8,10\}$
non può avere ordine 6, siccome a_4 è dispari.

$G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12}$ con $\{2,4,6,6\}$ e $g_C = 23$:

$\psi(\gamma_1) = m_1$ ha ordine 2, quindi $m_1 \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \{0,6\}$,
con $m_1 \neq (0,0,0)$,
$\psi(\gamma_2) = m_2$ ha ordine 4, quindi $m_2 \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \{3,9\}$
$\psi(\gamma_3) = m_3$ ha ordine 6, quindi $m_3 \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \{2,8,10\}$
allora
$\psi(\gamma_4) = m_4 = -m_1 - m_2 - m_3 = (a_4, b_4, c_4) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \{\text{dispari}\}$
non può avere ordine 6, siccome b_4 è dispari.

(k) 3 casi: $\{2,4,7,a\}$, $7 \leq a \leq 9$.

$$\left.\begin{array}{cc} \text{Se } G \text{ è abeliano,} & \\ \text{per il teorema 5.1.2} & \Rightarrow |G| \big| 56 \\ \text{e inoltre} & 28 \big| |G| \end{array}\right\} \Rightarrow |G| \in \{28, 56\}.$$

- Se $|G| = 28$, per la formula di Riemann-Hurwitz si ha

$$2g_C = 33 - \frac{28}{a},$$

ma non riusciamo a trovare alcun $7 \leq a \leq 9$, tale che $g_C \in \mathbb{Z}^{\geq 2}$.
- Se $|G| = 56$, per la formula di Riemann-Hurwitz si ha

$$g_C = 32 - \frac{28}{a},$$

da cui segue $a = 7$ con $g_C = 28$ e gli indici di ramificazione sono $\{2,4,7,7\}$.
Per il teorema di classificazione 5.1.3

$$\begin{array}{rcl} G & \cong & \mathbb{Z}_{56} \\ G & \cong & \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{28} \\ G & \cong & \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{14}. \end{array}$$

Il primo caso viene escluso per il teorema 5.5.1; l'ultimo viene escluso siccome non ha elementi di ordine 4 ed inoltre $4 \nmid d_3 = 14$. Rimane il caso

$$G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{28} \quad \text{con} \quad \{2,4,7,7\} \text{ e } g_C = 28,$$

ma possiamo dimostrare che non esiste:

$\psi(\gamma_1) = m_1$ ha ordine 2, quindi $m_1 \in \mathbb{Z}_2 \times \{0,14\}$,
con $m_1 \neq (0,0)$,
$\psi(\gamma_2) = m_2$ ha ordine 4, quindi $m_2 \in \mathbb{Z}_2 \times \{7,21\}$
$\psi(\gamma_3) = m_3$ ha ordine 7, quindi $m_3 \in \mathbb{Z}_2 \times \{4,8,12,16\}$
allora
$\psi(\gamma_4) = m_4 = -m_1 - m_2 - m_3 = (a_4, b_4) \in \mathbb{Z}_2 \times \{\text{dispari}\}$
non può avere ordine 7, siccome b_4 è dispari.

(l) 5 casi: $\{2,5,5,a\}$, $5 \leq a \leq 9$

$$\left.\begin{array}{cc} \text{Se } G \text{ è abeliano,} & \\ \text{per il teorema 5.1.2} & \Rightarrow |G|\big||50 \\ \text{e inoltre} & 10\big||G| \end{array}\right\} \Rightarrow |G| \in \{10, 50\}.$$

- Se $|G| = 10$, per la formula di Riemann-Hurwitz si ha

$$2g_C = 13 - \frac{10}{a},$$

ma non riusciamo a trovare alcun $5 \leq a \leq 9$, tale che $g_C \in \mathbb{Z}^{\geq 2}$.
- Se $|G| = 50$, per la formula di Riemann-Hurwitz si ha

$$2g_C = 57 - \frac{50}{a},$$

anche questa volta non riusciamo a trovare alcun $5 \leq a \leq 9$, tale che $g_C \in \mathbb{Z}^{\geq 2}$.

(m) 2 casi: $\{2,5,6,a\}$, $6 \leq a \leq 7$

$$\left.\begin{array}{cc} \text{Se } G \text{ è abeliano,} & \\ \text{per il teorema 5.1.2} & \Rightarrow |G|\big||60 \\ \text{e inoltre} & 30\big||G| \end{array}\right\} \Rightarrow |G| \in \{30, 60\}.$$

- Se $|G| = 30$, per la formula di Riemann-Hurwitz si ha

$$2g_C = 36 - \frac{30}{a},$$

ma non riusciamo a trovare alcun $6 \leq a \leq 7$, tale che $g_C \in \mathbb{Z}^{\geq 2}$.

- Se $|G| = 60$, per la formula di Riemann-Hurwitz si ha

$$g_C = 35 - \frac{30}{a},$$

dunque $a = 6$ con $g_C = 30$ e gli indici di ramificazione sono $\{2, 5, 6, 6\}$.
Per il teorema di classificazione 5.1.3 abbiamo

$$\begin{aligned} G &\cong \mathbb{Z}_{60} \\ G &\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{30}. \end{aligned}$$

Il caso ciclico viene escluso per il teorema 5.5.1. Possiamo dimostrare che il caso restante non esiste:

$\psi(\gamma_1) = m_1$ ha ordine 2, quindi $m_1 \in \mathbb{Z}_2 \times \{0, 15\}$,
con $m_1 \neq (0, 0)$,
$\psi(\gamma_2) = m_2$ ha ordine 5, quindi $m_2 \in \{0\} \times \{6, 12, 18, 24\}$
$\psi(\gamma_3) = m_3$ ha ordine 6, quindi $m_3 \in \mathbb{Z}_2 \times \{5, 25\}$
allora
$\psi(\gamma_4) = m_4 = -m_1 - m_2 - m_3 \in \mathbb{Z}_2 \times \{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$
non ha ordine 6.

(n) Una famiglia infinita: $\{3, 3, 3, n\}$, $3 \leq n$

$$\left.\begin{array}{cc} \text{Se } G \text{ è abeliano,} & \\ \text{per il teorema 5.1.2} & \Rightarrow |G|\big|27 \\ \text{e inoltre} & 3\big||G| \end{array}\right\} \Rightarrow |G| \in \{3, 9, 27\}.$$

- Se $|G| = 3$, per la formula di Riemann-Hurwitz si ha

$$2g_C = 5 - \frac{3}{a},$$

dunque $a = 3$ e $g_C = 2$ e gli indici di ramificazione sono $\{3, 3, 3, 3\}$.
Per il teorema di classificazione abbiamo

$$G \cong \mathbb{Z}_3.$$

Dimostriamo che il caso ciclico con gli indici di ramificazione $\{3, 3, 3, 3\}$ e $g_C = 2$ esiste:

$\psi(\gamma_1) = m_1 = 1 \in \mathbb{Z}_3$ ha ordine 3
$\psi(\gamma_2) = m_2 = 2 \in \mathbb{Z}_3$ ha ordine 3
$\psi(\gamma_3) = m_3 = 1 \in \mathbb{Z}_3$ ha ordine 3
allora
$\psi(\gamma_4) = m_4 = -m_1 - m_2 - m_3 = 2 \in \mathbb{Z}_3$ ha ordine 3.

- Se $|G| = 9$, per la formula di Riemann-Hurwitz si ha

$$2g_C = 11 - \frac{9}{a},$$

dunque $a = 3, 9$ e $g_C = 4, 5$ e gli indici di ramificazione sono $\{3, 3, 3, 3\}$ e $\{3, 3, 3, 9\}$.
Per il teorema di classificazione abbiamo

$$\begin{aligned} G &\cong \mathbb{Z}_9 \\ G &\cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3. \end{aligned}$$

Il caso ciclico viene escluso per il teorema 5.5.1. Osserviamo inoltre che il secondo caso non ha elementi di ordine 9.
Rimane il caso

$$G \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \quad \text{con} \quad \{3, 3, 3, 3\} \text{ e } g_C = 4.$$

Il seguente esempio ci assicura l'esistenza:

$\psi(\gamma_1) = m_1 = (1, 0) \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ ha ordine 3
$\psi(\gamma_2) = m_2 = (0, 1) \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ ha ordine 3
$\psi(\gamma_3) = m_3 = (1, 1) \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ ha ordine 3
allora
$\psi(\gamma_4) = m_4 = -m_1 - m_2 - m_3 = (1, 1) \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ ha ordine 3.

- Se $|G| = 27$, per la formula di Riemann-Hurwitz si ha

$$2g_C = 29 - \frac{27}{a},$$

dunque $a = 3, 9, 27$ con $g_C = 10, 13, 14$.
Per il teorema di classificazione abbiamo

$$\begin{aligned} G &\cong \mathbb{Z}_{27} \\ G &\cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_9 \\ G &\cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3. \end{aligned}$$

Il caso ciclico viene escluso per il teorema 5.5.1. Il secondo caso non ha elementi di ordine 27 e non viene generato da un insieme di elementi di ordini $\{3, 3, 3, 3\}$. Osserviamo inoltre che il terzo gruppo non ha elementi di ordine 9 oppure 27.
Rimangono i seguenti casi:

$$\begin{aligned} G &\cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_9 \text{ con } \{3, 3, 3, 9\} \text{ e } g_C = 13 \\ G &\cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \text{ con } \{3, 3, 3, 3\} \text{ e } g_C = 10. \end{aligned}$$

Il primo caso non esiste:

$\psi(\gamma_1) = m_1$ ha ordine 3, quindi $m_1 \in \mathbb{Z}_3 \times \{0,3,6\}$
$\psi(\gamma_2) = m_2$ ha ordine 3, quindi $m_2 \in \mathbb{Z}_3 \times \{0,3,6\}$
$\psi(\gamma_3) = m_3$ ha ordine 3, quindi $m_3 \in \mathbb{Z}_3 \times \{0,3,6\}$
allora
$\psi(\gamma_4) = m_4 = -m_1 - m_2 - m_3 = (a_4, b_4) \in \mathbb{Z}_3 \times \{0,3,6\}$
non può avere ordine 9, perché $3 \big| b_4$.

Il seguente esempio conferma l'esistenza del secondo caso:

$\psi(\gamma_1) = m_1 = (1,0,0) \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ ha ordine 3
$\psi(\gamma_2) = m_2 = (0,1,0) \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ ha ordine 3
$\psi(\gamma_3) = m_3 = (0,0,1) \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ ha ordine 3
allora
$\psi(\gamma_4) = m_4 = -m_1 - m_2 - m_3 = (2,2,2) \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$
ha ordine 3.

(o) 8 casi: $\{3,3,4,a\}$, $4 \le a \le 11$

$$\left.\begin{array}{cc} \text{Se } G \text{ è abeliano,} & \\ \text{per il teorema 5.1.2} & \Rightarrow |G| \big| 36 \\ \text{e inoltre} & 12 \big| |G| \end{array}\right\} \Rightarrow |G| \in \{12, 36\}.$$

- Se $|G| = 12$, per la formula di Riemann-Hurwitz si ha

$$2g_C = 15 - \frac{12}{a},$$

dunque $a = 4$ e $g_C = 6$ e gli indici di ramificazione sono $\{3,3,4,4\}$.
Per il teorema di classificazione abbiamo

$$\begin{array}{rcl} G & \cong & \mathbb{Z}_{12} \\ G & \cong & \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6. \end{array}$$

Il secondo caso viene escluso siccome non ha elementi di ordine 4, in particolare $4 \nmid d_2 = 6$.
Dimostriamo che il caso ciclico esiste:

$\psi(\gamma_1) = m_1 = 4 \in \mathbb{Z}_{12}$ ha ordine 3
$\psi(\gamma_2) = m_2 = 8 \in \mathbb{Z}_{12}$ ha ordine 3
$\psi(\gamma_3) = m_3 = 3 \in \mathbb{Z}_{12}$ ha ordine 4
allora
$\psi(\gamma_4) = m_4 = -m_1 - m_2 - m_3 = 3$ ha ordine 4.

- Se $|G| = 36$, per la formula di Riemann-Hurwitz si ha

$$2g_C = 41 - \frac{36}{a},$$

dunque $a = 4$ e $g_C = 16$ e gli indici di ramificazione sono $\{3, 3, 4, 4\}$.
Per il teorema di classificazione dei gruppi abeliani si hanno

$$\begin{aligned} G &\cong \mathbb{Z}_{36} \\ G &\cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{12} \\ G &\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{18} \\ G &\cong \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6. \end{aligned}$$

Il caso ciclico viene escluso per il teorema 5.5.1; il terzo e quarto caso vengono esclusi, siccome non hanno elementi di ordine 4, in particolare $4 \nmid d_2 = 18$ e $4 \nmid d_2 = 6$.
Verificare che il seguente caso non esiste, non è immediato:

$$G \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{12} \text{ con } \{3, 3, 4, 4\} \text{ e } g_C = 16.$$

Supponiamo per assurdo che $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{12}$ abbia un insieme di generatori sferici $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ di ordini $\{3, 3, 4, 4\}$; sia

$$\varphi \colon \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{12} \longrightarrow \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$$

la proiezione sul quoziente. Osserviamo che si tratta di un omomorfismo suriettivo.
Definiamo $h_i := \varphi(g_i)$.
Allora gli h_i formano un insieme di generatori sferici di $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$, e

$$\mathrm{ord}(h_i) \big| \mathrm{ord}(g_i).$$

Dal momento che ogni elemento non nullo di $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ ha ordine 3, segue $h_3 = h_4 = 0$; quindi $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ ha un insieme di generatori sferici, $\{h_1, h_2\}$, di cardinalità 2, il che implica che è un gruppo ciclico, assurdo.

(p) 3 casi: $\{3, 3, 5, a\}$, $5 \leq a \leq 7$

$$\left.\begin{array}{cc} \text{Se } G \text{ è abeliano,} & \\ \text{per il teorema 5.1.2} & \Rightarrow |G| \big| 45 \\ \text{e inoltre} & 15 \big| |G| \end{array}\right\} \Rightarrow |G| \in \{15, 45\}.$$

- Se $|G| = 15$, per la formula di Riemann-Hurwitz si ha

$$2g_C = 19 - \frac{15}{a},$$

dunque $a = 5$ e $g_C = 8$ e gli indici di ramificazione sono $\{3, 3, 5, 5\}$.
Per il teorema di classificazione l'unico caso che può verificarsi è

$$G \cong \mathbb{Z}_{15} \text{ con } \{3, 3, 5, 5\} \text{ e } g_C = 8.$$

Possiamo dimostrare che esiste:

$\psi(\gamma_1) = m_1 = 5 \in \mathbb{Z}_{15}$ ha ordine 3
$\psi(\gamma_2) = m_2 = 10 \in \mathbb{Z}_{15}$ ha ordine 3
$\psi(\gamma_3) = m_3 = 6 \in \mathbb{Z}_{15}$ ha ordine 5
allora
$\psi(\gamma_4) = m_4 = -m_1 - m_2 - m_3 = 9 \in \mathbb{Z}_{15}$ ha ordine 5.

- Se $|G| = 45$, per la formula di Riemann-Hurwitz si ha

$$2g_C = 53 - \frac{45}{a},$$

dunque $a = 5$ e $g_C = 22$ e gli indici di ramificazione sono $\{3, 3, 5, 5\}$. Per il teorema di classificazione si hanno

$$\begin{aligned} G &\cong \mathbb{Z}_{45} \\ G &\cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{15}. \end{aligned}$$

Il caso ciclico viene escluso per il teorema 5.5.1. L'unico caso che può verificarsi è

$$G \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{15} \text{ con } \{3, 3, 5, 5\} \text{ e } g_C = 22,$$

ma dimostriamo che non esiste:
Supponiamo per assurdo che $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{15}$ abbia un insieme di generatori sferici $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ di ordini $\{3, 3, 5, 5\}$; sia

$$\varphi\colon \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{15} \longrightarrow \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$$

la proiezione sul quoziente. Osserviamo che si tratta di un omomorfismo suriettivo.
Definiamo $h_i := \varphi(g_i)$.
Allora gli h_i formano un insieme di generatori sferici di $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$, e

$$\mathrm{ord}(h_i) \big| \mathrm{ord}(g_i).$$

Dal momento che ogni elemento non nullo di $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ ha ordine 3, segue $h_3 = h_4 = 0$; quindi $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ ha un insieme di generatori sferici, $\{h_1, h_2\}$, di cardinalità 2, il che implica che è un gruppo ciclico, assurdo.

(q) 2 casi: $\{3, 4, 4, a\}$, $4 \leq a \leq 5$.

$$\left.\begin{array}{cc} \text{Se } G \text{ è abeliano,} & \\ \text{per il teorema 5.1.2} & \Rightarrow |G| \big| 48 \\ \text{e inoltre} & 12 \big| |G| \end{array}\right\} \Rightarrow |G| \in \{12, 24, 48\}.$$

- Se $|G| = 12$, per la formula di Riemann-Hurwitz si ha

$$g_C = 8 - \frac{6}{a},$$

ma non riusciamo a trovare alcun $4 \leq a \leq 5$, tale che $g_C \in \mathbb{Z}^{\geq 2}$.
- Se $|G| = 24$, per la formula di Riemann-Hurwitz si ha

$$g_C = 15 - \frac{12}{a},$$

dunque $a = 4$ e $g_C = 12$ e gli indici di ramificazione sono $\{3, 4, 4, 4\}$.
Per il teorema di classificazione si hanno

$$\begin{aligned} G &\cong \mathbb{Z}_{24} \\ G &\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12} \\ G &\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6. \end{aligned}$$

Nessuno dei tre casi è possibile: il caso ciclico viene escluso per il teorema 5.5.1, il secondo non ha un insieme di generatori di ordini $\{3, 4, 4, 4\}$ e il terzo viene escluso, siccome non ha elementi di ordine 4.
- Se $|G| = 48$, per la formula di Riemann-Hurwitz si ha

$$g_C = 29 - \frac{24}{a},$$

dunque $a = 4$ e $g_C = 23$ e gli indici di ramificazione sono $\{3, 4, 4, 4\}$.
Per il teorema di classificazione si hanno

$$\begin{aligned} &1.) \quad G \cong \mathbb{Z}_{48} \\ &2.) \quad G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{24} \\ &3.) \quad G \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12} \\ &4.) \quad G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12} \\ &5.) \quad G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6. \end{aligned}$$

Il caso ciclico viene escluso per il teorema 5.5.1; i casi 2.),4.) e 5.) non hanno un insieme di generatori di ordini $\{3, 4, 4, 4\}$.
L'unico caso che può verificarsi è

$$G \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12} \text{ con } \{3, 4, 4, 4\} \text{ e } g_C = 23.$$

Possiamo dimostrare che non esiste:

$\psi(\gamma_1) = m_1$ ha ordine 3, quindi $m_1 \in \{0\} \times \{4, 8\}$
$\psi(\gamma_2) = m_2$ ha ordine 4, quindi $m_2 \in \{0, 1, 3\} \times \{0, 3, 9\}$,
con $m_2 \neq (0, 0)$,
$\psi(\gamma_3) = m_3$ ha ordine 4, quindi $m_3 \in \{0, 1, 3\} \times \{0, 3, 9\}$,
con $m_3 \neq (0, 0)$,
allora
$\psi(\gamma_4) = m_4 = -m_1 - m_2 - m_3 \in \mathbb{Z}_4 \times \{1, 4, 5, 7, 8, 10, 11\}$
non ha ordine 4.

(III) Tre valori critici $k = 3$:
Classifichiamo e dimostriamo l'esistenza dei casi con tre valori critici direttamente con la seguente proposizione.

Proposizione 5.5.4. *Sia G un gruppo abeliano con tre generatori sferici. Allora esistono $\alpha, \beta, \delta_1, \delta_2, \delta_3 \in \mathbb{Z}$, tali che*

- $\gcd(\delta_i, \delta_j) = 1$ *per $i \neq j$,*
- *gli ordini dei tre generatori sono*

$$(\alpha\beta\delta_2\delta_3, \alpha\beta\delta_1\delta_3, \alpha\beta\delta_1\delta_2)\,,$$

- $G \cong \mathbb{Z}_\alpha \times \mathbb{Z}_{\alpha\beta\delta_1\delta_2\delta_3}$,
- *il prodotto $\delta_1\delta_2\delta_3\,(\beta + 1)$ è pari.*

Viceversa, per ogni scelta di $\alpha, \beta, \delta_1, \delta_2, \delta_3 \in \mathbb{Z}$ con $\gcd(\delta_i, \delta_j) = 1$ per $i \neq j$ e prodotto $\delta_1\delta_2\delta_3\,(\beta + 1)$ pari, il gruppo

$$G \cong \mathbb{Z}_\alpha \times \mathbb{Z}_{\alpha\beta\delta_1\delta_2\delta_3}$$

ha un insieme di tre generatori sferici di ordini

$$(\alpha\beta\delta_2\delta_3, \alpha\beta\delta_1\delta_3, \alpha\beta\delta_1\delta_2)\,.$$

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Prendiamo la successione esatta corta

$$1 \longrightarrow K \longrightarrow \mathbb{Z}_{l_1} \times \mathbb{Z}_{l_2} \times \mathbb{Z}_{l_3} \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

Le immagini di $(1, 0, 0)$, di $(0, 1, 0)$ e di $(0, 0, 1)$ in G hanno ordine l_1, l_2 e l_3 rispettivamente.
Siccome $(1, 1, 1) \in K$ segue che

$$(\mathrm{lcm}(l_2, l_3), \mathrm{lcm}(l_2, l_3), \mathrm{lcm}(l_2, l_3)) = (\mathrm{lcm}(l_2, l_3), 0, 0) \in K$$

$$\Rightarrow l_1 \big| \mathrm{lcm}(l_2, l_3).$$

Similmente si ottiene $l_2 \big| \mathrm{lcm}(l_1, l_3)$ e $l_3 \big| \mathrm{lcm}(l_1, l_2)$.
In particolare definiamo

$$\begin{array}{rcl} L & := & \mathrm{lcm}(l_1, l_2, l_3) = \mathrm{lcm}(l_i, l_j) \qquad \forall i \neq j \\ l & := & \gcd(l_1, l_2, l_3) \\ \delta_i & := & \gcd\left(\dfrac{l_j}{l}, \dfrac{l_k}{l}\right) \text{ con } \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}\,. \end{array}$$

Dalla definizione segue

$$\gcd(\delta_i, \delta_j) = 1.$$

Notiamo ora che

$$\begin{aligned}
\delta_2\delta_3 = \operatorname{lcm}(\delta_2,\delta_3)\,\Big|\,\frac{l_1}{l} \quad &\Rightarrow \quad l\delta_2\delta_3\big|l_1 \Rightarrow l_1 = \mu_1 l\delta_2\delta_3\\
&\Rightarrow \quad l\delta_1\delta_3\big|l_2 \Rightarrow l_2 = \mu_2 l\delta_1\delta_3\\
&\Rightarrow \quad l\delta_1\delta_2\big|l_3 \Rightarrow l_3 = \mu_3 l\delta_1\delta_2
\end{aligned}$$

$$\gcd\left(\frac{l_1}{l},\frac{l_2}{l}\right) = \delta_3 \Rightarrow \gcd(\mu_1\delta_2,\mu_2\delta_1) = 1,$$

in generale $\gcd(\mu_i\delta_j,\mu_j\delta_i) = 1$. Inoltre

$$\begin{aligned}
l_1\big|\operatorname{lcm}(l_2,l_3) = L = l\delta_1\operatorname{lcm}(\mu_2\delta_3,\mu_3\delta_2) \quad &\Rightarrow \quad \mu_1\delta_2\delta_3\big|\delta_1\operatorname{lcm}(\mu_2\delta_3,\mu_3\delta_2)\\
&\Rightarrow \quad \mu_1\delta_2\delta_3\big|\delta_1\delta_2\delta_3\mu_2\mu_3\\
&\Rightarrow \quad \mu_1\big|\delta_1\mu_2\mu_3.
\end{aligned}$$

Ma $\gcd(\mu_1,\delta_1) = \gcd(\mu_1,\mu_2) = \gcd(\mu_1,\mu_3) = 1$. Segue $\mu_1 = 1$.
Si dimostra in modo analogo $\mu_2 = \mu_3 = 1$.

Posso concludere

$$\begin{aligned}
l_1 &= l\delta_2\delta_3\\
l_2 &= l\delta_1\delta_3\\
l_3 &= l\delta_1\delta_2.
\end{aligned}$$

Ci rimane da verificare che $l = \alpha\beta$, ma prima enunciamo e dimostriamo il seguente lemma.

Lemma 5.5.5.

$$\frac{\mathbb{Z}_{l\delta_2\delta_3}\times\mathbb{Z}_{l\delta_1\delta_3}\times\mathbb{Z}_{l\delta_1\delta_2}}{<(1,1,1)>} \cong \mathbb{Z}_l \times \mathbb{Z}_{l\delta_1\delta_2\delta_3}.$$

Dimostrazione. Consideriamo

$$\begin{aligned}
\alpha_1,\alpha_2 \quad &\text{con} \quad \alpha_1\delta_2 - \alpha_2\delta_1 = 1\\
\beta_1,\beta_2 \quad &\text{con} \quad \beta_1\delta_3 - \beta_2\delta_1\delta_2 = 1.
\end{aligned}$$

Le matrici

$$A = \begin{pmatrix} \beta_1 & -\beta_1 & -\beta_2\\ -\alpha_2\delta_1 & \alpha_1\delta_2 & 0\\ -\delta_1\delta_2 & \delta_1\delta_2 & \delta_3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \delta_1 & \alpha_1\beta_2\delta_1\delta_2\\ \alpha_2 & \delta_2 & \alpha_2\beta_2\delta_1\delta_2\\ 1 & 0 & \beta_1\delta_3 \end{pmatrix}$$

hanno determinante 1 e coefficienti interi, cioè $A, B \in SL(3,\mathbb{Z})$.
Possiamo calcolare

$$A\cdot\begin{pmatrix} l\delta_2\delta_3 & 0 & 0\\ 0 & l\delta_1\delta_3 & 0\\ 0 & 0 & l\delta_1\delta_2 \end{pmatrix}\cdot B = \begin{pmatrix} l & 0 & 0\\ 0 & l\delta_1\delta_2\delta_3 & 0\\ 0 & 0 & l\delta_1\delta_2\delta_3 \end{pmatrix}$$

Chiamiamo le matrici

$$M = \begin{pmatrix} l\delta_2\delta_3 & 0 & 0 \\ 0 & l\delta_1\delta_3 & 0 \\ 0 & 0 & l\delta_1\delta_2 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} l & 0 & 0 \\ 0 & l\delta_1\delta_2\delta_3 & 0 \\ 0 & 0 & l\delta_1\delta_2\delta_3 \end{pmatrix}$$

e osserviamo i seguenti diagrammi commutativi

$$\begin{array}{ccc} 0 & & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}^3 & \xrightarrow{B} & \mathbb{Z}^3 \\ {\scriptstyle M}\downarrow & & {\scriptstyle N}\downarrow \\ \mathbb{Z}^3 & \xrightarrow{A} & \mathbb{Z}^3 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}_{l\delta_2\delta_3} \times \mathbb{Z}_{l\delta_1\delta_3} \times \mathbb{Z}_{l\delta_1\delta_2} & \longrightarrow & \mathbb{Z}_l \times \mathbb{Z}_{l\delta_1\delta_2\delta_3} \times \mathbb{Z}_{l\delta_1\delta_2\delta_3} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 \end{array}$$

Segue che la matrice A induce un'isomorfismo

$$A\colon \mathbb{Z}_{l\delta_2\delta_3} \times \mathbb{Z}_{l\delta_1\delta_3} \times \mathbb{Z}_{l\delta_1\delta_2} \longrightarrow \mathbb{Z}_l \times \mathbb{Z}_{l\delta_1\delta_2\delta_3} \times \mathbb{Z}_{l\delta_1\delta_2\delta_3}.$$

Siccome

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad = \begin{pmatrix} -\beta_2 \\ 1 \\ \delta_3 \end{pmatrix}$$

deduciamo l'isomorfismo

$$\frac{\mathbb{Z}_{l\delta_2\delta_3} \times \mathbb{Z}_{l\delta_1\delta_3} \times \mathbb{Z}_{l\delta_1\delta_2}}{<(1,1,1)>} \cong \frac{\mathbb{Z}_l \times \mathbb{Z}_{l\delta_1\delta_2\delta_3} \times \mathbb{Z}_{l\delta_1\delta_2\delta_3}}{<(-\beta_2, 1, \delta_3)>}.$$

e quest'ultimo è isomorfo a $\mathbb{Z}_l \times \mathbb{Z}_{l\delta_1\delta_2\delta_3}$, ovvero

$$\frac{\mathbb{Z}_l \times \mathbb{Z}_{l\delta_1\delta_2\delta_3} \times \mathbb{Z}_{l\delta_1\delta_2\delta_3}}{<(-\beta_2, 1, \delta_3)>} \cong \mathbb{Z}_l \times \mathbb{Z}_{l\delta_1\delta_2\delta_3},$$

con la mappa sul quoziente

$$D := \begin{pmatrix} 1 & \beta_2 & 0 \\ 0 & -\delta_3 & 1 \end{pmatrix} : \mathbb{Z}_l \times \mathbb{Z}_{l\delta_1\delta_2\delta_3} \times \mathbb{Z}_{l\delta_1\delta_2\delta_3} \longrightarrow \mathbb{Z}_l \times \mathbb{Z}_{l\delta_1\delta_2\delta_3}.$$

In particolare osserviamo che

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta_2 & 0 \\ 0 & -\delta_3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\beta_2 \\ 1 \\ \delta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Usando il risultato del lemma si ha che $G \cong \dfrac{\mathbb{Z}_l \times \mathbb{Z}_{l\delta_1\delta_2\delta_3}}{H}$ per qualche sottogruppo $H < \mathbb{Z}_l \times \mathbb{Z}_{l\delta_1\delta_2\delta_3}$. Ne segue che

$$G \cong \mathbb{Z}_\theta \times \mathbb{Z}_\eta \text{ con } \theta \big| \eta \text{ oppure } \theta = 1,$$

questo segue dal teorema di classificazione di gruppi abeliani, in quanto un gruppo abeliano non mappa suriettivamente su un gruppo di rango maggiore[1].

Assumendo $\eta = \max \left\{ \mathrm{ord}(g) \big| g \in G \right\}$ e considerando $G \cong \dfrac{\mathbb{Z}_l \times \mathbb{Z}_{l\delta_1\delta_2\delta_3}}{H}$ segue $\eta \big| l\delta_1\delta_2\delta_3$.
Inoltre

$$\left.\begin{array}{rcl} \mathrm{ord}(g_1) & = & l\delta_2\delta_3 \\ \mathrm{ord}(g_2) & = & l\delta_1\delta_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{lcm}(l\delta_2\delta_3, l\delta_1\delta_3) \big| \eta \Rightarrow l\delta_1\delta_2\delta_3 \big| \eta.$$

Allora $\eta = l\delta_1\delta_2\delta_3$.

$$\theta\eta = \mathrm{ord}(G) \big| \mathrm{ord}(\mathbb{Z}_l \times \mathbb{Z}_{l\delta_1\delta_2\delta_3}) = l^2\delta_1\delta_2\delta_3.$$

Definiamo

$$\alpha := \theta \Big| \frac{l^2\delta_1\delta_2\delta_3}{\eta} = l$$

e prendendo $\beta := \dfrac{l}{\alpha}$ segue

$$G \cong \mathbb{Z}_\alpha \times \mathbb{Z}_{\alpha\beta\delta_1\delta_2\delta_3}.$$

Infine dimostriamo che il prodotto $\delta_1\delta_2\delta_3\,(\beta + 1)$ è pari.
Sia $\{g_1, g_2, g_3\}$ l'insieme dei generatori sferici di tipo suddetto.
Siccome

$$\begin{array}{lcl} \mathrm{ord}(g_1) = \alpha\beta\delta_2\delta_3 & \Rightarrow & g_1 = (a_1, k_1\delta_1) \\ \mathrm{ord}(g_2) = \alpha\beta\delta_1\delta_3 & \Rightarrow & g_2 = (a_2, k_2\delta_2) \\ \mathrm{ord}(g_3) = \alpha\beta\delta_1\delta_2 & \Rightarrow & g_3 = (a_3, k_3\delta_3)\,. \end{array}$$

[1] Con rango di un gruppo abeliano finito intendiamo la cardinalità minima di un insieme di generatori.

Supponiamo per assurdo $\delta_1\delta_2\delta_3\,(\beta+1)$ dispari. Allora β è pari.

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow & \alpha\beta\delta_1\delta_2\delta_3 \text{ è pari} \\ \Rightarrow & k_1\delta_1 + k_2\delta_2 + k_3\delta_3 \text{ è pari} \\ \Rightarrow & \exists i \in \{1,2,3\} \text{ tale che } k_i\delta_i \text{ è pari.} \end{array}$$

Inoltre $\delta_1\delta_2\delta_3\,(\beta+1)$ è dispari, da cui segue che, $\forall j \in \{1,2,3\}$, δ_j è dispari. Questo implica che $\exists i \in \{1,2,3\}$ tale che k_i è pari: $k_i = 2h_i$. Scegliamo j,k con $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$.
Ma allora

$$\alpha \cdot \frac{\beta}{2} \cdot \delta_j\delta_k \cdot g_i = \left(\alpha\left[\frac{\beta}{2}\delta_j\delta_k a_i\right], \alpha\beta\delta_1\delta_2\delta_3\,[h_i]\right) \equiv 0 \text{ in } \mathbb{Z}_\alpha \times \mathbb{Z}_{\alpha\beta\delta_1\delta_2\delta_3}.$$

$$\Rightarrow \mathrm{ord}(g_i)\Big|\alpha\frac{\beta}{2}\delta_j\delta_k,$$

questo contraddice $\mathrm{ord}(g_i) = \alpha\beta\delta_j\delta_k$.

($\Leftarrow$) Fissiamo

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2 & \text{con} & \widetilde{\alpha}_1\delta_2 - \widetilde{\alpha}_2\delta_1 = 1 \\ \widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2 & \text{con} & \widetilde{\beta}_1\delta_3 - \widetilde{\beta}_2\delta_1\delta_2 = 1. \end{array}$$

Osserviamo che gli $\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\beta}_j$ esistono, siccome $\gcd(\delta_i, \delta_j) = 1$.
Al variare di $\eta, \theta \in \mathbb{Z}$ scriviamo

$$\begin{array}{rcl} \alpha_1 & = & \widetilde{\alpha}_1 + \eta\delta_1 \\ \alpha_2 & = & \widetilde{\alpha}_2 + \eta\delta_2 \\ \beta_1 & = & \widetilde{\beta}_1 + \theta\delta_1\delta_2 \\ \beta_2 & = & \widetilde{\beta}_2 + \theta\delta_3. \end{array}$$

Quindi

$$\alpha_1\delta_2 - \alpha_2\delta_1 = \beta_1\delta_3 - \beta_2\delta_1\delta_2 = 1.$$

A meno di permutare i δ_i, possiamo supporre $\delta_3\,(\beta+1)$ pari e $\delta_1\delta_2$ dispari.
Siano

$$\begin{array}{rcl} l_1 & = & \alpha\beta\delta_2\delta_3 \\ l_2 & = & \alpha\beta\delta_1\delta_3 \\ l_3 & = & \alpha\beta\delta_1\delta_2. \end{array}$$

Dobbiamo dimostrare che (l_1, l_2, l_3) siano gli ordini dei tre generatori sferici di G.

Osserviamo

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{Z}_{l_1} \times \mathbb{Z}_{l_2} \times \mathbb{Z}_{l_3} & \xrightarrow{A} & \mathbb{Z}_l \times \mathbb{Z}_{l\delta_1\delta_2\delta_3} \times \mathbb{Z}_{l\delta_1\delta_2\delta_3} & \xrightarrow{D} & \mathbb{Z}_l \times \mathbb{Z}_{l\delta_1\delta_2\delta_3} \\
\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \longrightarrow & \begin{pmatrix} \beta_1 \\ -\alpha_2\delta_1 \\ -\delta_1\delta_2 \end{pmatrix} & \longrightarrow & \begin{pmatrix} \beta_1 - \alpha_2\beta_2\delta_1 \\ \alpha_2\delta_1\delta_3 - \delta_1\delta_2 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \longrightarrow & \begin{pmatrix} -\beta_1 \\ \alpha_1\delta_2 \\ \delta_1\delta_2 \end{pmatrix} & \longrightarrow & \begin{pmatrix} -\beta_1 + \alpha_1\beta_2\delta_2 \\ -\alpha_1\delta_2\delta_3 + \delta_1\delta_2 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \longrightarrow & \begin{pmatrix} -\beta_2 \\ 0 \\ \delta_3 \end{pmatrix} & \longrightarrow & \begin{pmatrix} -\beta_2 \\ \delta_3 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Prendiamo

$$\begin{aligned}
g_1 &= (\beta_1 - \alpha_2\beta_2\delta_1, \delta_1(\alpha_2\delta_3 - \delta_2)) \\
g_2 &= (-\beta_1 + \alpha_1\beta_2\delta_2, \delta_2(\delta_1 - \alpha_1\delta_3)) \\
g_3 &= (-\beta_2, \delta_3)
\end{aligned}$$

e osserviamo che

(a) $\{g_1, g_2, g_3\}$ è un insieme di generatori, in quanto immagine di un insieme di generatori di $\mathbb{Z}_{\alpha\beta} \times \mathbb{Z}_{\alpha\beta\delta_1\delta_2\delta_3}$ per la naturale mappa suriettiva

$$E\colon \mathbb{Z}_{\alpha\beta} \times \mathbb{Z}_{\alpha\beta\delta_1\delta_2\delta_3} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_{\alpha} \times \mathbb{Z}_{\alpha\beta\delta_1\delta_2\delta_3}.$$

(b) $\{g_1, g_2, g_3\}$ è un insieme di generatori sferici, siccome

$$\begin{aligned}
g_1 + g_2 + g_3 &= (-\alpha_2\beta_2\delta_1 + \alpha_1\beta_2\delta_2 - \beta_2, \alpha_2\delta_1\delta_3 - \alpha_1\delta_2\delta_3 + \delta_3) \\
&= (\beta_2(\alpha_1\delta_2 - \alpha_2\delta_1) - \beta_2, \delta_3(\alpha_2\delta_1 - \alpha_1\delta_2 + 1)) \\
&= (0, 0).
\end{aligned}$$

(c) Verifichiamo infine che $\mathrm{ord}(g_i) = l_i$, $\forall i \in \{1, 2, 3\}$.
Possiamo dire che

$$\begin{aligned}
\lambda g_3 = 0 &\Leftrightarrow \alpha \big| \lambda\beta_2 \text{ e } \alpha\beta\delta_1\delta_2\delta_3 \big| \lambda\delta_3 \\
&\Leftrightarrow \alpha\beta\delta_1\delta_2 \big| \lambda.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\mathrm{ord}(g_3) = \alpha\beta\delta_1\delta_2.$$

Resta da dimostrare

$$\begin{aligned}
\mathrm{ord}(g_1) &= \alpha\beta\delta_2\delta_3 \\
\mathrm{ord}(g_2) &= \alpha\beta\delta_1\delta_3.
\end{aligned}$$

Sia p primo con $p\big|\alpha\beta$. Allora

$$\begin{aligned} p\big|\alpha_2\delta_3-\delta_2 \quad\Leftrightarrow\quad & p\nmid\delta_2 \text{ e } p\nmid\delta_3 \\ & [\alpha_2]_p=[\delta_2]_p\cdot[\delta_3]_p^{-1}. \end{aligned}$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} [\alpha_2]_p=[\delta_2]_p\cdot[\delta_3]_p^{-1}\Leftrightarrow[\eta]_p &= [\delta_2]_p^{-1}\Big([\delta_2]_p\,[\delta_3]_p^{-1}-[\widetilde{\alpha}_2]_p\Big) \\ &= [\delta_3]_p^{-1}-[\delta_2]_p^{-1}\,[\widetilde{\alpha}_2]_p\,. \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} p\big|\,(\alpha_2\delta_3-\delta_2) \quad\Leftrightarrow\quad & \gcd(p,\delta_2)=\gcd(p,\delta_3)=1 \\ & [\eta]_p=[\delta_3]_p^{-1}-[\delta_2]_p^{-1}\,[\widetilde{\alpha}_2]_p=:\lambda_{1_p}\in\mathbb{Z}_p. \end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned} p\big|\,(\delta_1-\alpha_1\delta_3) \quad\Leftrightarrow\quad & \gcd(p,\delta_1)=\gcd(p,\delta_3)=1 \\ & [\eta]_p=[\delta_3]_p^{-1}-[\delta_1]_p^{-1}\,[\widetilde{\alpha}_1]_p=:\lambda_{2_p}\in\mathbb{Z}_p. \end{aligned}$$

Per ipotesi, uno tra δ_3 e $\beta+1$ è pari.
Supponiamo δ_3 pari. Allora $2\nmid(\alpha\delta_3-\delta_2)$ e $2\nmid(\delta_1-\alpha_1\delta_3)$. Per ogni altro primo p che divide $\alpha\beta$, scegliamo una classe $\lambda_p\neq\lambda_{1_p}\lambda_{2_p}$ in $\mathbb{Z}_p$; questa classe esiste perché $p>2$, da cui segue che esistono almeno tre classi distinte in $\mathbb{Z}_p$.
Scegliamo $\eta\in\mathbb{Z}$ tale che $\forall p\neq 2$, $p\big|\alpha\beta$ $[\eta]_p=\lambda_p$. Allora

$$\begin{aligned} \gcd(\alpha_2\delta_3-\delta_2,\alpha\beta)=1 \quad&\Rightarrow\quad \gcd(\alpha_2\delta_3-\delta_2,\alpha\beta\delta_2\delta_3)=1 \\ &\Rightarrow\quad \operatorname{ord}(g_1)=\alpha\beta\delta_2\delta_3 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \gcd(\delta_1-\alpha_1\delta_3,\alpha\beta)=1 \quad&\Rightarrow\quad \gcd(\delta_1-\alpha_1\delta_3,\alpha\beta\delta_1\delta_3)=1 \\ &\Rightarrow\quad \operatorname{ord}(g_2)=\alpha\beta\delta_1\delta_3. \end{aligned}$$

Quindi δ_3 è pari.

Altrimenti $\delta_1,\delta_2,\delta_3,\beta$ sono dispari.
In questo caso la relazione $\alpha_1\delta_2-\alpha_2\delta_1=1$ implica che uno degli α_i è pari e l'altro dispari.
Ragionando come nel caso precedente possiamo scegliere η in modo che

(i) $\gcd(\alpha_2\delta_3-\delta_2,\alpha\beta)=1$
(ii) $\gcd(\delta_1-\alpha_1\delta_3,\alpha\beta)=2^k$ con $k\geq 1$.

(i) implica che $\mathrm{ord}(g_1) = \alpha\beta\delta_2\delta_3$.
(ii) invece implica $\gcd(\delta_1 - \alpha_1\delta_3, \alpha\beta\delta_1\delta_3) = 2^k$. Ne segue che $2^k \big| \alpha$ e

$$\mathrm{ord}\left([-\alpha_1\delta_2\delta_3 + \delta_1\delta_2]_{\alpha\beta\delta_1\delta_2\delta_3}\right) = \frac{\alpha}{2^k}\beta\delta_1\delta_3.$$

Da questo segue $\mathrm{ord}(g_2) = \lambda\frac{\alpha}{2^k}\beta\delta_1\delta_3$, dove $\lambda \in \mathbb{N}$ è il minimo per cui

$$\lambda\frac{\alpha}{2^k}\beta\delta_1\delta_3\,(\alpha_1\beta_2\delta_2 - \beta_1) \equiv 0 \mod \alpha$$
$$\Updownarrow$$
$$\lambda\beta\delta_1\delta_3\,(\alpha_1\beta_2\delta_2 - \beta_1) \equiv 0 \mod 2^k.$$

Possiamo scegliere θ in modo che β_1 sia dispari.
Se $\widetilde{\beta_1}$ è dispari prendiamo $\theta = 0$; segue che β_2 è pari.
Se $\widetilde{\beta_1}$ è pari prendiamo $\theta = 1$.
Segue che

$$B := \beta\delta_1\delta_3\,(\alpha_1\beta_2\delta_2 - \beta_1) \text{ è dispari}$$
$$\Rightarrow B \text{ è invertibile modulo } 2^k.$$

Ma allora $\lambda = 2^k \Rightarrow \mathrm{ord}(g_2) = 2^k\frac{\alpha}{2^k}\beta\delta_1\delta_3 = \alpha\beta\delta_1\delta_3$.

$\square$

Riassumiamo il caso trovato

$$\begin{array}{lcl} G \cong \mathbb{Z}_\alpha \times \mathbb{Z}_{\alpha\beta\delta_1\delta_2\delta_3} & \text{con} & \{\alpha\beta\delta_2\delta_3, \alpha\beta\delta_1\delta_3, \alpha\beta\delta_1\delta_2\} \\ & \text{e} & \gcd(\delta_i, \delta_j) = 1, \forall i \neq j. \end{array}$$

Infine dobbiamo calcolare il genere della superficie di Riemann C su cui agisce il gruppo abeliano tramite la formula di Riemann-Hurwitz:

$$\begin{aligned} 2g_C - 2 &= \alpha^2\beta\delta_1\delta_2\delta_3\left\{1 - \frac{1}{\alpha\beta\delta_2\delta_3} - \frac{1}{\alpha\beta\delta_1\delta_3} - \frac{1}{\alpha\beta\delta_1\delta_2}\right\} \\ &= \alpha^2\beta\delta_1\delta_2\delta_3\left\{\frac{\alpha\beta\delta_1\delta_2\delta_3 - \delta_1 - \delta_2 - \delta_3}{\alpha\beta\delta_1\delta_2\delta_3}\right\} \\ &= \alpha\left\{\alpha\beta\delta_1\delta_2\delta_3 - \delta_1 - \delta_2 - \delta_3\right\} \\ \Rightarrow g_C &= 1 + \frac{\alpha}{2}\left\{\alpha\beta\delta_1\delta_2\delta_3 - \delta_1 - \delta_2 - \delta_3\right\}. \end{aligned}$$

$\square$

Bibliografia

[1] William S. Massey *A basic course in algebraic topology.* Springer-Verlag New York 1991.

[2] R.Miranda. *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*, volume 5 of *Graduate Studies in Mathematics.* American Mathematical Society, 1995.

[3] Ravi S. Kulkarni. *Riemann surfaces admitting large authomorphism groups*, volume 201 of *Contemporary Mathematics*, 1997.

[4] Otto Forster. *Lectures on Riemann Surfaces.* Springer-Verlag; New York, 1981.

[5] Manfredo P. do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces.* Prentice-Hall, Inc.Englewood Cliffs, New Jeresey 1976.

[6] Christian Karpfinger, Kurt Meyberg. *ALGEBRA-Gruppen-Ringe-Körper.* Spektrum, Akademischer Verlag Heidelberg, Zweite Auflage 2010.

[7] Tammo Tom Dieck. *Topologie.* Walter de Gruyter GmbH & Co. Berlin, Zweite Auflage 2010.

[8] Lang, S. *Algebra*, Springer-Verlag New York, 2002, 3rd ed.

[9] Alessandro Silva. *Elementi di teoria delle funzioni analitiche di una variabile complessa.* Edizioni nuova cultura; Università di Roma "La sapienza". Seconda edizione: ottobre 1995

[10] Clelia Lomuto. Tesi di Laurea *Gruppi abeliani di automorfismi di superfici di Riemann*; Relatore: prof. Rita Pardini, corso di laurea in matematica, a.a. 2002/2003.

[11] Clelia Lomuto *Riemann surfaces with a large abelian group of automorphisms.* Collect. Math. 57 (2006), no. 3: 309-318.

[12] Gianluca Occhetta *Note di geometria IV e V unit didattica* , dispense di topologia generale, algebrica e geometria differenziale.

[13] www.mat.uniroma3.it/users/sernesi/GE50203/GE50203supRiemann.pdf

[14] A. Hurwitz. *Über algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich.* Math. Ann., 41: 403-442, 1893.

[15] S.Nakajima. *On abelian automorphism groups of algebraic curves.* London Math. Soc., 36:23-32, 1987.

[16] R.Pardini *Abelian covers of algebraic varieties.* Journal für di reine und angewandte Mathematik, 417:191-213,1991.

[17] H.A. Schwartz. *Über diejenigen algebraischen Gleichungen zwischen zwei veränderlichen Grössen, welche eine schaar rationaler, eindeutig umkehrbarer Transformationen in sich selbst zulassen.* Journal für die reine und angewandte Mathematik, 87:139-145, 1890.

[18] A. Wiman. *Über die hyperelliptischen Kurven und diejenigen vom Geschlechte $p = 3$, welche eindeutige Transformationen in sich zulassen.* Bihang Kongl.Svenska Vetenkamps-Akademiens Handlingar, 21:1-23, 1895.