XIX Congresso U.M.I.
Bologna, 12–17 settembre 2011

Deformazioni di Burniat terziarie

Roberto Pignatelli
Dipartimento di Matematica, Università di Trento

Nel 1966 P. Burniat ([2]) costruisce superfici di tipo generale di genere geometrico nullo come rivestimenti del piano. Tra esse sono particolarmente interessanti le superficie *terziarie*, quelle con $K_S^2 = 3$; la teoria delle deformazioni predice la loro deformabilità a superficie diverse, rimaste misteriose per oltre 50 anni.

Per costruirle, in [3], abbiamo utilizzato le *unprojections*; il risultato è il seguente. Si consideri $(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})^4$ con coordinate t_{jk}, $j \in \{0 \dots 3\}$, $k \in \{0,1\}$, l'ipersuperficie $Z_1 := \{t_{01}t_{10}t_{20}t_{30} + t_{00}t_{11}t_{21}t_{31} = 0\}$ nel sistema lineare $|\mathcal{O}_{(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})^4}(1,1,1,1)|$, e il gruppo $\tilde{G}$ (di ordine 16) di automorfismi di $(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})^4$ generato da

$jk =$	00	01	10	11	20	21	30	31
$A_1(t_{jk}) =$	t_{10}	$\sqrt{-1} \cdot t_{11}$	t_{00}	$\sqrt{-1} \cdot t_{01}$	t_{31}	$-\sqrt{-1} \cdot t_{30}$	t_{21}	$\sqrt{-1} \cdot t_{20}$
$A_2(t_{jk}) =$	t_{20}	$\sqrt{-1} \cdot t_{21}$	t_{31}	$\sqrt{-1} \cdot t_{30}$	t_{00}	$\sqrt{-1} \cdot t_{01}$	t_{11}	$-\sqrt{-1} \cdot t_{10}$
$A_3(t_{jk}) =$	t_{30}	$\sqrt{-1} \cdot t_{31}$	t_{21}	$-\sqrt{-1} \cdot t_{20}$	t_{11}	$\sqrt{-1} \cdot t_{10}$	t_{00}	$\sqrt{-1} \cdot t_{01}$

Teorema (Neves, Pignatelli). *Sia $Z_2 \in |\mathcal{O}_{(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})^4}(2,2,2,2)|^{\tilde{G}}$ generica.*

Allora $\tilde{G}$ agisce liberamente su $Z_1 \cap Z_2$ e la proiezione sul quoziente $X := (Z_1 \cap Z_2)/\tilde{G}$ è il rivestimento universale del modello canonico di una superficie di tipo generale con $p_g(S) = 0$ e $K_S^2 = 3$.

Le superfici X ottenute formano una famiglia 4-dimensionale nello spazio dei moduli delle superfici di tipo generale contenenti le superfici di Burniat terziarie.

Indipendentemente Bauer e Catanese ([1]) hanno costruito un'altra famiglia di dimensione 4, contenente le Burniat terziarie, densa ma non chiusa in una componente irriducibile dello spazio dei moduli. Ne segue che la famiglia del Teorema vi è densa. Il possesso di un pencil è una proprietà chiusa per cui parrebbe plausibile che il rivestimento universale di ogni degenerazione si immerga in $(\mathbb{P}^1)^4$, da cui seguirebbe

Congettura. *La famiglia del Teorema 1 copre un'intera componente irriducibile dello spazio dei moduli delle superficie di tipo generale.*

Bibliografia

[1] I. Bauer, F. Catanese: 'Burniat surfaces III: deformations of automorphisms and extended Burniat surfaces", arXiv:1012.3770.

[2] P. Burniat: "Sur les surfaces de genre $P_{12} > 1$". Ann. Mat. Pura Appl. (4) **71** (1966), 1–24.

[3] J. Neves, R. Pignatelli: "Unprojection and deformations of tertiary Burniat surfaces", arXiv:1101.3160.

E–mail: `Roberto.Pignatelli@unitn.it`.
Sezione 20: Geometria algebrica.