

Università degli studi di Pisa
Anno Accademico 1993-94
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE FISICHE
E NATURALI

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

TESI DI LAUREA

**Singularità di
superfici algebriche**

Candidato: **Roberto Pignatelli**

Relatore: **Chiar.mo Prof. Fulvio Lazzeri**

Controrelatore: **Chiar.mo Prof. Riccardo Benedetti**

Indice

1	Singularità analitiche	4
1.1	Insiemi analitici	4
1.2	Singularità di insiemi analitici	6
1.3	Singularità normali	9
1.4	Il teorema di normalizzazione	13
2	Desingularizzazione di superfici	18
2.1	Preliminari	18
2.2	Tecnica di desingularizzazione	21
2.3	Primo esempio	25
2.4	Secondo esempio	27
3	Procedimento inverso	32
3.1	Preliminari	32
3.2	Rivestimento di $\Omega \setminus \Gamma$	33
3.3	Completamento del rivestimento alla parte liscia di Γ	35
3.4	Estensione alla singularità	39
3.5	Sistemi di curve eccezionali del primo tipo	41
4	Alcune applicazioni	44
4.1	Studio del gruppo fondamentale del complementare di una curva in \mathbb{C}^2	44
4.2	τ -rivestimenti ramificati in $\Gamma = \{x^2 = y^n\}$	49
4.3	τ -rivestimenti ramificati in $\Gamma = \{x^n = y^n\}$	50

4.4	τ -rivestimenti ramificati in $\Gamma = \{x^p = y^q\}$	54
4.5	τ -rivestimenti ramificati in $\Gamma = \{x(x^3 + y^2) = 0\}$	59
2		

Introduzione

Nella seguente tesi ci occupiamo di studiare le singolarità normali (cioè le singolarità isolate) di superfici analitiche, viste come rivestimenti ramificati di un intorno dell'origine in \mathbb{C}^2 .

Ammettiamo solo ramificazioni semplici (chiamate nel seguito τ -rivestimenti), e vedremo come qualunque superficie normale possa essere rappresentata in tal modo.

Viceversa fissata la curva di ramificazione (come germe di curva per l'origine in \mathbb{C}^2) cerchiamo di vedere se è possibile, e fino a che punto, capire se esistono superfici che si ramificano in tal modo su di essa, e di quali superfici si tratta.

Dimostreremo che il problema è di natura combinatoria; per la precisione vedremo che è sufficiente dimostrare l'esistenza di un rivestimento di grado finito del complementare della curva tale che i lacci geometrici (ossia i cammini del gruppo fondamentale che si ottengono facendo un percorso che porta dal punto base ad un punto vicino alla curva, facendo poi un giro intorno alla curva, e poi tornando indietro lungo lo stesso percorso) agiscano sulla fibra del punto base come trasposizioni, per avere un suo "completamento" ad un τ -rivestimento, e l'unicità di questo (cap. 3).

La costruzione di tale rivestimento è legata al gruppo fondamentale del complementare della curva in \mathbb{C}^2 e, in particolare, alla sua presentazione di Van Kampen.

Nell'ultimo capitolo prendiamo in esame alcuni esempi di curve o di classi di curve, studiando i possibili τ -rivestimenti ramificati su di esse, cercando di risolvere il problema combinatorio associato.

In alcuni casi favorevoli, troveremo una completa, o parziale, descrizione di tutti i τ -rivestimenti possibili.

Capitolo 1

Singularità analitiche

1.1 Insiemi analitici

Per prima cosa ci occupiamo di definire le strutture che ci serviranno. Tutti gli enunciati non dimostrati di questo capitolo, laddove non venga indicato espressamente un riferimento bibliografico, possono essere ritrovati in [N].

Definizione 1.1.1 (Insieme analitico) *Sia Ω un aperto di \mathbb{C}^n , $A \subset \Omega$. A è detto insieme analitico se $\forall a \in \Omega$, c'è un intorno di a , $U \subset \Omega$, e delle funzioni oloomorfe f_1, \dots, f_p in U tali che*

$$A \cap U = \{x \in U \mid f_1(x) = \dots = f_p(x) = 0\}.$$

Fondamentale per lo studio degli insiemi analitici, è il seguente teorema, che noi enunciamo senza dimostrazione:

Teorema 1.1.1 (Teorema di preparazione di Weiestrass) *Sia $f \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$, e supponiamo che la funzione $g(x_n) = f(0, \dots, 0, x_n)$ non sia identicamente nulla. Allora*

i) $g(x_n) = x_n^p h(x_n)$

con $p \geq 0$ ed h invertibile in $\mathbb{C}\{x_n\}$.

ii) $\forall \varphi \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$, $\exists a \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$, e $b_1, \dots, b_p \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ tali che

$$\varphi = af + \sum_{\nu=1}^p b_\nu x_n^{p-\nu}.$$

iii) $\exists u \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$ invertibile, e $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ con $a_\nu(0) = 0$, e

$$f = u(x_n^p + \sum_{\nu=1}^p a_\nu x_n^{p-\nu}).$$

Il nostro studio è di carattere locale, ed è per questo che introduciamo la seguente

Definizione 1.1.2 (Germe di insieme analitico) Consideriamo l'insieme delle terne (U, S, a) , con $U \subset \mathbb{C}^n$ aperto, S insieme analitico di U , $a \in S$.

Quozientiamo questo insieme con la relazione $(U, S, a) \simeq (U', S', a') \Leftrightarrow \exists V \subset U; V' \subset U'$, ed un isomorfismo analitico $\varphi : V \rightarrow V'$ tale che $\varphi(V \cap S) = V' \cap S'$ e $\varphi(a) = a'$.

Chiameremo questo insieme insieme dei germi di insiemi analitici.

Se $S \subset \Omega \subset \mathbb{C}^n$ è un insieme analitico, $a \in S$, denoteremo con S_a il germe dell'insieme analitico S nel punto a , ossia l'elemento nel quoziente appena descritto associato alla terna (Ω, S, a) .

A livello di notazione, chiameremo $I = I(S_a)$ l'ideale delle funzioni che si annullano in S_a , nell'anello $\mathcal{O}_{n,a}$ dei germi di funzioni olomorfe per a . Sarà $S_a \subset S'_a \Leftrightarrow I(S_a) \supset I(S'_a)$

Definizione 1.1.3 (Germe irriducibile) Diremo che S_a è irriducibile \Leftrightarrow non esistono due germi S_a^1 e S_a^2 tali che $S_a^1 \cup S_a^2 = S_a$ e $\forall i S_a^i \neq S_a$.

Risulta allora essere una semplice osservazione il fatto che

Osservazione 1.1.1 S_a è irriducibile $\Leftrightarrow I(S_a)$ è un ideale primo.

Si può inoltre dedurre dal fatto che \mathcal{O}_n è un anello noetheriano che

Proposizione 1.1.1 Ogni germe analitico S_a può essere scritto come unione finita di germi irriducibili S_a^ν e questa decomposizione è unica a meno dell'ordine.

Definizione 1.1.4 (Componenti irriducibili di un germe analitico)

Chiameremo componenti irriducibili di un germe analitico S_a , i germi S_a^ν introdotti dalla Proposizione 1.1.1.

1.2 Singolarità di insiemi analitici

Definizione 1.2.1 (Punto regolare) Sia S un insieme analitico in un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}^n$.

Un punto $a \in S$ è detto punto regolare di dimensione p per S se esiste un intorno U di a , $U \subset \Omega$, tale che $S \cap U$ è una sottovarietà analitica di dimensione p di U .

Definizione 1.2.2 (Punto singolare) Sia S insieme analitico.

Un punto $a \in S$ è detto singolare se non è regolare.

Per caratterizzare meglio il concetto di dimensione ed estenderlo anche ai punti singolari è fondamentale il seguente teorema:

Teorema 1.2.1 Sia S insieme analitico, S_a il germe corrispondente, e I l'ideale associato. $\exists p$ tale che, dopo un cambio di coordinate lineare in \mathbb{C}^n , l'applicazione $\eta : \mathcal{O}_p \rightarrow \mathcal{O}_n/I$ sia iniettiva e renda \mathcal{O}_n/I un modulo finito su \mathcal{O}_p .

Dimostrazione: Sia $f \in I$, $f \neq 0$. Ovviamente possiamo fare un cambio di coordinate di \mathbb{C}^n tale che $f(0, x_n) \neq 0$. Questa è evidentemente una condizione invariante per ulteriori cambi di coordinate in \mathbb{C}^{n-1} . Per il Teorema di preparazione di Weiestrass $f = uP_n$, con u invertibile e

$$P_n = x_n^{q_n} + \sum_{\nu=0}^{q_n-1} a_\nu(x_1, \dots, x_{n-1})x_n^\nu, \quad a_\nu(0) = 0 \quad P_n \in I$$

Sia $I_{n-1} = I \cap \mathcal{O}_{n-1}$. Ci possono essere due casi: o $I_{n-1} = 0$, ed in tal caso prendiamo $p = n - 1$, oppure $\exists f_{n-1} \in I_{n-1} \setminus \{0\}$, e quindi possiamo ripetere il ragionamento fatto per f e trovare

$$P_{n-1} = x_{n-1}^{q_{n-1}} + \sum_{\nu=0}^{q_{n-1}-1} a'_\nu(x_1, \dots, x_{n-2})x_{n-1}^\nu, \quad a'_\nu(0) = 0 \quad P_{n-1} \in I_{n-1}$$

Iterando questo processo, troveremo un p tale che $I_p = I \cap \mathcal{O}_p = 0$, e, $\forall r > p$, esiste un pseudopolinomio

$$P_r = x_r^{q_r} + \sum_{\nu=0}^{q_r-1} a_\nu^{(n-r)}(x_1, \dots, x_{r-1})x_r^\nu, \quad a_\nu^{(n-r)}(0) = 0 \quad P_r \in I_r = I \cap \mathcal{O}_r$$

Questo p verifica le ipotesi del teorema.

Infatti $I_p = 0$ implica l'iniettività della mappa η .

Inoltre, per il punto ii) del teorema di preparazione,

$$f \equiv \sum_{\nu=0}^{q_n-1} f_{1,\nu}(x_1, \dots, x_{n-1})x_n^\nu \pmod{P_n}$$

iterando

$$f_{1,\nu} \equiv \sum_{\mu=0}^{q_{n-1}-1} f_{2,\nu,\mu}(x_1, \dots, x_{n-2})x_{n-1}^\mu \pmod{P_{n-1}}$$

e così via. In conclusione

$$f \equiv \sum_{\alpha_j < q_j} f_\alpha(x_1, \dots, x_p)x_{p+1}^{\alpha_{p+1}} \cdots x_n^{\alpha_n} \pmod{P_{p+1}, \dots, P_n}$$

Quindi le immagini dei monomi del tipo $x_{p+1}^{\alpha_{p+1}} \cdots x_n^{\alpha_n}$ generano \mathcal{O}_n/I su \mathcal{O}_p .

Q.E.D.

Un risultato fondamentale che enunciamo senza dimostrazione su questo intero p è il seguente

Teorema 1.2.2 *L'intero p del Teorema 1.2.1, coincide con il massimo m tale che $\forall U$ intorno di a in \mathbb{C}^n , esiste $b \in U \cap S$ liscio di dimensione m .*

A questo punto possiamo definire

Definizione 1.2.3 (Dimensione) *Sia S insieme analitico, $a \in S$.*

Chiameremo dimensione di S in a l'intero p del Teorema 1.2.1.

Diremo che l'insieme analitico S ha dimensione p se ha dimensione p in tutti i suoi punti.

Diremo che il germe S_a ha dimensione p se esiste una terna (U, S, a) che lo rappresenta, con S insieme analitico di dimensione p .

Altri risultati importanti che enunciamo senza dimostrazione sono i seguenti:

Teorema 1.2.3 *Sia S insieme analitico. L'insieme dei punti regolari di S è denso in S .*

Teorema 1.2.4 *L'insieme dei punti singolari di un insieme analitico è un insieme analitico.*

Dimostriamo invece il seguente:

Teorema 1.2.5 *Un germe di insieme analitico S_a è irriducibile se e soltanto se, detto S un insieme analitico corrispondente, S^* l'insieme dei punti regolari di S , $\exists\{U_n\}$ sistema fondamentale di intorni di a , tale che $\forall n S^* \cap U_n$ è connesso.*

Dimostrazione :

Una direzione è evidente; infatti se $S_a = S_a^1 \cup S_a^2$ con $S_a^1, S_a^2 \subset S_a$ germi analitici tali che $\forall i S_a^i \neq S_a$, se prendiamo un intorno U di a dove ci siano tre insiemi analitici S, S^1 ed S^2 che rappresentano questi tre germi, allora ovviamente $(S^1 \cap S^2) \subset S^*$ e quindi $S^* \cap U$ è sconnesso.

L'altra direzione verrà da noi dimostrata, per semplicità, solo nel caso $p = n - 1$. La dimostrazione del caso generale è più laboriosa, ma sfrutta essenzialmente la stessa tecnica. Pongo allora $p = n - 1$.

Sia U intorno di a ; possiamo supporre $S, S^* \subset U$ come sopra.

Suppongo per assurdo S^* sconnesso, e considero $\{S_i\}$, l'insieme delle componenti connesse di S^* . Considero ora $\overline{S_i}$; è sufficiente dimostrare che si tratta di insiemi analitici.

Poichè stiamo studiando il caso ipersuperficie possiamo supporre che esista un'unica funzione olomorfa f ridotta (cioè che non ammette fattori multipli in \mathcal{O}_n) generante l'ideale caratterizzante V . Sia $P \in \overline{S_i}$ un punto, f un germe di funzione in P che definisce V (cioè che si annulla in V e solo in V), e $z = (z_1, \dots, z_n)$ un sistema di coordinate locali vicino P . Per il Teorema di preparazione di Weierstrass noi possiamo assumere che f sia un polinomio di grado l in z_n . Possiamo trovare α e β tali che $g = \alpha f + \beta \frac{\partial f}{\partial z_n}$ con $g \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_{n-1}\}, g \neq 0$.

Considero ora la proiezione $\pi : (z_1, \dots, z_n) \mapsto (z_1, \dots, z_{n-1})$ ed osservo che si può vedere come un rivestimento finito non connesso di grado l di $V \cap (\Delta - \{g = 0\})$ su $\Delta' - \{g = 0\}$ dove Δ è un polidisco intorno a P e Δ' è la sua intersezione con \mathbb{C}^{n-1} . Poichè $S_i \cap (\Delta - \{g = 0\})$ è aperto in $S \cap (\Delta - \{g = 0\})$ ed altrettanto è il suo complementare, la proiezione ristretta a $S_i \cap \{g = 0\}$ è ancora un rivestimento di grado k .

Siano ora $w_\nu(z')$ le immagini inverse di $z' \in \Delta'$ contenute in un certo S_i e $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ le funzioni simmetriche elementari delle w_ν . Esse sono tutte olomorfe

e limitate su $\Delta' - \{g = 0\}$ e quindi si estendono in maniera unica su tutto Δ' . La funzione $f_i(z) = z_n^k + \sigma_1(z')z_n^{k-1} + \dots + \sigma_k(z')$ è una funzione analitica che si annulla solo su $\overline{S_i}$, che è la tesi.

Q.E.D.

Dal teorema 1.2.5 segue naturalmente la seguente

Osservazione 1.2.1 *Un insieme analitico irriducibile ha dimensione costante in tutti i suoi punti.*

Ha quindi sempre senso parlare di dimensione di un insieme analitico irriducibile. Altrimenti, parleremo di dimensione di un insieme analitico, soltanto se tutte le sue componenti irriducibili hanno la stessa dimensione.

1.3 Singolarità normali

Definizione 1.3.1 (Funzioni olomorfe su un insieme analitico)

Sia $S \subset \mathbb{C}^n$ spazio analitico, $f : S \rightarrow \mathbb{C}$. Si dice che f è olomorfa su S se esiste un aperto $U \subset \mathbb{C}^n$, $U \supset S$, ed una funzione olomorfa $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $\tilde{f}|_S \equiv f$.

Definizione 1.3.2 (Spazio complesso) *Chiameremo spazio complesso una coppia (X, \mathcal{O}) , con X spazio topologico separato, \mathcal{O} fascio di anelli su X , che sia localmente isomorfo ad uno spazio analitico con il fascio delle funzioni olomorfe su di esso.*

Su uno spazio complesso possiamo considerare anche un fascio di anelli più vasto di quello delle funzioni olomorfe, che chiameremo *fascio delle funzioni debolmente olomorfe*.

Definizione 1.3.3 (Funzioni debolmente olomorfe) *Sia (X, \mathcal{O}) spazio complesso, U aperto in X , S luogo singolare di X , $U' = U \cap S$, $U^* = U - U'$. $f : U^* \rightarrow \mathbb{C}$ si dice debolmente olomorfa su U , se è limitata in un intorno di ciascun punto di U' .*

Chiameremo $\tilde{\mathcal{O}}$ il fascio delle funzione debolmente olomorfe così definito.

Definizione 1.3.4 *Sia A anello, $S = \{a \in A | a \text{ non divide } 0\}$. Chiameremo completo anello dei quozienti di A , l'anello formato da tutti gli elementi della forma $\frac{b}{a}$, $b \in A$, $a \in S$, con le operazioni di anello naturalmente indotte da A .*

Risultato fondamentale sulle funzioni debolmente oloomorfe è quello che enunciamo qui di seguito senza dimostrazione.

Teorema 1.3.1 *L'anello delle funzioni debolmente oloomorfe è la chiusura integrale dell'anello delle funzioni oloomorfe nel proprio completo anello dei quozienti.*

Definizione 1.3.5 (Punto normale) *Sia (X, \mathcal{O}) spazio complesso, $P \in X$. Diremo che P è normale se in un suo intorno $\tilde{\mathcal{O}}_n = \mathcal{O}_n$.*

Osservazione 1.3.1 *Un punto liscio è sempre normale.*

Osservazione 1.3.2 *$a \in S$ normale $\Rightarrow S_a$ irriducibile.*

Per i punti normali vale il seguente

Teorema 1.3.2 *Sia X spazio complesso ed $a \in X$ normale; se S è l'insieme dei punti singolari di X noi abbiamo $\dim_a S \leq \dim X_a - 2$.*

La dimostrazione richiede alcuni lemmi.

Sia $A = \mathcal{O}_n/I$.

Osservazione 1.3.3 *Condizione necessaria e sufficiente perché l'omomorfismo naturale $\eta : \mathcal{O}_p \rightarrow A$ sia iniettivo e renda A un modulo finito su \mathcal{O}_p è che, se $I = I(S_a)$, $I_p = I \cap \mathcal{O}_p = 0$, ed esista un polinomio di Weierstrass $P_r(x_r; x') \in I$ con $r > p$.*

Questa osservazione discende immediatamente dalla dimostrazione del Teorema 1.2.1.

Sia I l'ideale associato ad X . Se il punto è normale la singolarità localmente è irriducibile, e quindi I è primo.

Lemma 1.3.1 $\forall f \in \mathcal{O}_n, \exists g \in \mathcal{O}_n - I, h \in \mathcal{O}_p$ tali che $gf - h \in I$.

Dimostrazione del lemma:

A è un modulo finito su \mathcal{O}_p per il teorema 1.2.1 e quindi posso scrivere per qualche m

$$f^m + \sum_{\nu=0}^{m-1} a_\nu(x_1, \dots, x_p) f^\nu \in I.$$

Supponiamo di averlo fatto per il minimo m possibile.

Allora basta prendere $h = -a_0$ e

$$g = f^{m-1} + \sum_{\nu=1}^{m-1} a_\nu(x') f^{\nu-1}$$

Q.E.D.

Lemma 1.3.2 *Se S_a è un germe irriducibile in a , e S'_a è un qualche germe analitico irriducibile con $S'_a \subset S_a$, allora $\dim_a S' < \dim S_a$.*

Dimostrazione del lemma:

Per l'Osservazione 1.3.3 possiamo scegliere coordinate x_1, \dots, x_n in \mathbb{C}^n , tali che, se $I = I(S_a)$ e $I' = I(S'_a)$, abbiamo $I \subset I'$, $I_p = I \cap \mathcal{O}_p = \{0\}$, ed esiste un polinomio di Weiestrass $P_r(x_r; x') \in I \forall r > p$.

Basta allora dimostrare che, a meno di un opportuno cambio di coordinate in $\mathbb{C}^p(x_1, \dots, x_p)$, c'è un polinomio di Weiestrass $P_p(x_p; x_1, \dots, x_{p-1}) \in I'$. Allora, se \mathcal{O}_q indica il fascio dei germi di funzioni oloomorfe in un punto, per il Teorema di preparazione basta dimostrare che esiste $h \in \mathcal{O}_p \cap I' = I'_p, h \neq 0$. Prendo $g \in \mathcal{O}_n, g \notin I, g \in I'$. Per il Lemma 1.3.1 esiste $g_1 \in \mathcal{O}_n - I, h \in \mathcal{O}_p$ con $gg_1 \equiv h \pmod{I}$. Poiché $g \in I', h \in I'$, e, da I primo, $gg_1 \notin I$, allora $h \notin I$ e quindi in particolare $h \neq 0$.

Q.E.D.

Lemma 1.3.3 *Sia X insieme analitico contenuto in un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}^n, b \in X$, X avente dimensione p in ogni punto, f funzione oloomorfa su Ω .*

Sia A l'insieme di annullamento di f su X .

Sia inoltre A a parte interna vuota, e tale che, se g è oloomorfa su X , e $g = 0$ su A , allora su X $g = h(f)$ con $h \in \mathcal{O}_x$,

\Rightarrow ogni punto regolare in A è anche un punto regolare in X .

Dimostrazione del lemma:

Prendiamo h_1, \dots, h_m famiglia di funzioni oloomorfe in un intorno U di un punto b in \mathbb{C}^n che si annullino su X e che generino l'ideale I delle funzioni oloomorfe che si annullano su X . Per ipotesi f, h_1, \dots, h_m generano il fascio \mathcal{I} delle funzioni oloomorfe in Ω che si annullano su A . Ma noi sappiamo (anche se non lo dimostriamo in questa sede) che se z è un punto regolare di A e

poniamo $h_0 = f$, allora $\text{rank} \left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j} \right)_{0 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} = n - \dim A_z = n - p + 1$ e quindi $\text{rank} \left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \geq n - p$ che ci dice che z è un punto regolare di X .

Q.E.D.

Dimostrazione del teorema:

Poiché X è normale in a , X_a è irriducibile. Sia $p = \dim X_a$. Ovviamente esisterà un intorno U di a tale che per ogni $b \in U$, $\dim X_b = p$. Supponiamo ora che $S \cap U$ abbia una componente irriducibile S' tale che $\dim S' = p - 1$. Sia ora \mathcal{G} ideale nell'anello $R = \mathcal{O}_a$ dei germi in a di funzione olomorfe su X corrispondente a S'_a . Sicuramente trattasi di un ideale primo che non ammette sottoideali primi \mathcal{Q} non banali. Infatti in tal caso \mathcal{Q} definirebbe il germe di un insieme analitico irriducibile Y_a tale che $S'_a \subset Y_a \subset X_a$ che è impossibile per il Lemma 1.3.2.

Considero ora R' localizzazione di R a \mathcal{G} . È un anello locale con ideale massimale $\mathcal{G}' = \mathcal{G}R'$. Essendo X normale ad A , tanto R quanto R' sono noetheriani ed integralmente chiusi. Inoltre \mathcal{G}' è il solo ideale primo non banale di R' . R' è un anello di Dedekind, e i suoi ideali si possono fattorizzare in maniera unica in ideali primi. Essendo \mathcal{G}' non banale posso trovare $u \in \mathcal{G}'$, $u \notin (\mathcal{G}')^2$. Allora l'ideale principale $uR' = (\mathcal{G}')^n$. Ma $u \notin (\mathcal{G}')^2$ e quindi $n = 1$ e R' è un dominio ad ideali principali.

Prendiamo ora $u = \frac{f_a}{g_a}$, $f_a, g_a \in R$, $g_a \notin \mathcal{G}$, e delle funzione olomorfe su U , f_1, \dots, f_k , che si annullano su S' che generino l'ideale \mathcal{I} delle funzioni olomorfe su U che si annullano su S' . I germi $(f_i)_a \in \mathcal{G} \subset \mathcal{G}'$, cosicché abbiamo $\frac{\alpha_i}{\beta_i} \in R'$ con $\frac{\alpha_i}{\beta_i} u = (f_i)_a$. Quindi esistono $\xi_i, \eta_i \in R$, $\eta_i \notin \mathcal{G}$, tali che $\eta_i (f_i)_a = \xi_i f_a$.

In conclusione esistono un intorno $V \supset U$ di a e delle funzioni olomorfe f, ξ_i, η_i di V tali che f induce il germe f_a , η_i non si annulla su S'_a e vale su V l'uguaglianza $\eta_i f_i = \xi_i f$.

Consideriamo ora b punto liscio di $S' \cap V$ e tale che $\eta_i(b) \neq 0 \forall i$. Poiché f_1, \dots, f_k generano \mathcal{I} e, vicino b , f_i è multiplo di f , f genera \mathcal{Q} in un intorno di b . Per il Lemma 1.3.3 b è un punto regolare di X che è un assurdo perché $b \in S' \subset S$.

Q.E.D.

Questo risultato ci porta immediatamente ad una considerazione importante.

Osservazione 1.3.4 *Le singolarità di una superficie normale (cioè avente*

solo singolarità normali) sono isolate.

Il Teorema 1.3.2 si può invertire in opportune ipotesi; a noi basterà sapere che ([F])

Teorema 1.3.3 *Sia X ipersuperficie in C^n , S l'insieme dei suoi punti singolari, $p \in X$ tale che $\dim_p S \leq \dim_p X - 2 = n - 3$. Allora p è normale.*

1.4 Il teorema di normalizzazione

Definizione 1.4.1 *Sia X uno spazio complesso. Una normalizzazione (Y, π) di X è una coppia formata da uno spazio complesso normale Y e da una applicazione $\pi : Y \rightarrow X$ che verificano le seguenti proprietà :*

i) π è una mappa propria ed a fibra finita.

ii) Se S è l'insieme dei punti singolari ed A la sua controimmagine per π allora $Y \setminus A$ è denso in Y e $\pi|_{Y \setminus A} : Y \setminus A \rightarrow X \setminus S$ è un isomorfismo analitico.

Ci occupiamo in questa sezione di dimostrare il seguente

Teorema 1.4.1 (Teorema di normalizzazione di Oka) *Sia (X, \mathcal{O}) uno spazio complesso.*

Allora (X, \mathcal{O}) ammette una normalizzazione (Y, π) .

La dimostrazione del teorema richiede alcuni lemmi. Il primo lo enunciamo senza dimostrazione.

Lemma 1.4.1 *$\tilde{\mathcal{O}}_a$ è un modulo finito su \mathcal{O}_a , che è contenuto nel suo completo anello dei quozienti.*

Lemma 1.4.2 *Se $(Y_1, \pi_1), (Y_2, \pi_2)$ sono normalizzazioni di X , allora esiste un isomorfismo analitico $\varphi : Y_1 \rightarrow Y_2$ tale che $\pi_1 = \pi_2 \circ \varphi$.*

Dimostrazione:

Consideriamo l'insieme S dei punti singolari di X , e chiamiamo $A_i = \pi_i^{-1}(S)$. Sia ora $\varphi' : Y_1 \setminus A_1 \rightarrow Y_2 \setminus A_2$ definita come $\varphi' = \pi_2^{-1} \circ \pi_1$.

Innanzitutto noi affermiamo che esiste una mappa olomorfa $\varphi : Y_1 \rightarrow Y_2$, tale che $\varphi|_{Y_1 \setminus A_1} \equiv \varphi'$. Sia infatti $y_0 \in A_1$ e $x_0 = \pi_1(y_0)$. Ovviamente $\pi_2^{-1}(x_0)$ è un insieme finito.

Sia U_2 intorno di $\pi_2^{-1}(x_0)$ isomorfo tramite un opportuno isomorfismo ψ ad un insieme analitico S_2 in un aperto di \mathbb{C}^n . Poichè π_2 è una mappa propria, esiste un intorno $V_2 \subset\subset U_2$ saturo rispetto a π_2 . Posso prendere V intorno di a tale che $\pi_1(V) \subset \pi_2(V_2)$.

Considero ora la mappa $\psi \circ \varphi' : V \setminus A_1 \rightarrow S_2$.

Poichè Y è normale questa mappa ammette un'estensione olomorfa $\Phi : V \rightarrow \overline{\psi(V_2)} \subset \mathbb{C}^n$. A questo punto ottengo la mappa olomorfa $\varphi : V \rightarrow Y_2$ definita come $\varphi = \psi^{-1} \circ \Phi$. Ovviamente questo verifica l'affermazione a livello locale, e di conseguenza anche a livello globale.

Verificata l'affermazione è sufficiente osservare che per la stessa ragione esiste anche una mappa olomorfa $\varphi^{-1} : Y_2 \rightarrow Y_1$ con le stesse proprietà e che inverte φ su un denso, e quindi è l'inversa globale.

Q.E.D.

Lemma 1.4.3 *Sia X spazio complesso, Y un suo sottoinsieme analitico. Sia inoltre A un sottoinsieme analitico di $X \setminus Y$. Allora \overline{A} è analitico $\Leftrightarrow \exists B$ analitico, tale che $B \setminus Y = A$.*

Dimostrazione:

Una direzione è banale. Infatti se \overline{A} è analitico, allora è sufficiente prendere $B = \overline{A}$, ed avremo uno spazio analitico tale che $B \setminus Y = A$.

Viceversa se $\exists B$ con le proprietà espresse dall'enunciato, basta osservare che \overline{A} non è altro che l'unione di tutte le componenti irriducibili di B non contenute in Y .

Q.E.D.

Lemma 1.4.4 *Un insieme analitico compatto S è un insieme finito di punti.*

Dimostrazione: Poiché $S \subset \mathbb{C}^n$ è sufficiente dimostrare che $\forall f : S \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa, $f(S)$ è un insieme finito di punti.

Procedo per assurdo.

Supponiamo quindi di avere $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $f(S)$ non è un insieme finito di punti. Comunque sarà sicuramente $f(S)$ compatto, e quindi potrà

prendere $\alpha \in f(S) - f(S)^\circ$, $\alpha_\nu \in f(S)^\circ$, tali che $\alpha_\nu \rightarrow \alpha$ e $\alpha_\nu \neq \alpha_\mu$ quando $\mu \neq \nu$. Sia ora $\{s_\nu\}$ una possibile scelta di controimmagini di $\{\alpha_\nu\}$. A meno di passare ad una sottosuccessione posso supporre per compattezza $s_\nu \rightarrow s_0 \in S$, ed ovviamente ne seguirà $f(s_0) = \alpha$. Siano ora $S_{k,0}$ i rami di S in s_0 . Essi sono in numero finito e quindi almeno uno di essi dovrà contenere infiniti s_ν , e quindi su di esso la funzione non potrà essere costante. Ma allora la funzione olomorfa f , su questo ramo, avrà immagine un intorno dell'immagine di s_0 (per il principio del massimo per gli insiemi analitici), il che va contro l'ipotesi $\alpha \in f(S) \setminus f(S)^\circ$.

Q.E.D.

Enunciamo il seguente Lemma senza dimostrazione:

Lemma 1.4.5 *Sia X spazio complesso. L'insieme degli $a \in X$ tali che X è normale ad a , è aperto in X .*

Lemma 1.4.6 *Sia X spazio complesso, X_a irriducibile. Sia X' l'insieme dei punti regolari di X , U intorno di a in X .*

Per ogni funzione h olomorfa e limitata su $U \cap X'$, allora su $U \cap X'$ $\exists \lim_{x \rightarrow a} h(x)$.

Dimostrazione:

Consideriamo l'insieme E di tutti i punti limite, ossia l'insieme degli $\alpha \in C$, tali che esiste una successione $x_\nu \rightarrow a$, $x_\nu \in X'$, tale che $\lim_{\nu \rightarrow \infty} h(x_\nu) = \alpha$. La tesi è che E sia formato da un solo elemento.

Per il Teorema 1.3.1 E è un insieme finito. Basta quindi dimostrare che E è connesso.

Sappiamo dal Teorema 1.2.5 che, se X_a è irriducibile, esiste un sistema fondamentale di intorni di a , fatto con aperti di X la cui parte liscia è connessa. Possiamo allora prendere una successione di intorni di a , che denoteremo con $\{V_\nu\}$ tali che $V_{\nu+1} \subset V_\nu$, $\bigcap V_\nu = a$, con la proprietà che $V_\nu \cap X'$ è connesso. Ma allora

$$E = \bigcap K_\nu$$

dove $K_\nu = \overline{h(V_\nu \cap X')}$; ovviamente tutti i K_ν sono connessi compatti, $K_{\nu+1} \subset K_\nu$, e quindi anche la loro intersezione è connessa.

Q.E.D.

A questo punto abbiamo tutti gli elementi per dimostrare il Teorema di normalizzazione di Oka.

Dimostrazione del Teorema di normalizzazione di Oka:

Per il lemma 1.4.2, è sufficiente dimostrare che ogni punto di X ha un intorno U che ammette una normalizzazione (il lemma ci consente di incollare le normalizzazioni locali).

Di conseguenza possiamo supporre che X sia un insieme analitico, $X \subset \mathbb{C}^n$. Dal lemma 1.4.1 sappiamo che $\tilde{\mathcal{O}}_a$ è un \mathcal{O}_a -modulo finito. Prendiamo un insieme di generatori di $\tilde{\mathcal{O}}_a$ su \mathcal{O}_a , $\{h_1, \dots, h_m\}$, e poi prendiamo un intorno V di a in X , tale che $\forall i$ $h_i = \frac{f_i}{g_i}$, f_i, g_i olomorfe su V , e tale che il luogo di zeri delle g_i abbia parte interna vuota in V . Sia V' l'insieme dei punti regolari di V . Possiamo supporre le h_i olomorfe su V' , a patto di aver preso V sufficientemente piccolo. Sia allora $h : V' \rightarrow V \times \mathbb{C}^m$ la mappa $h(x) = (x, h_1(x), \dots, h_m(x))$. $Y' = h(V')$ è ovviamente un insieme analitico in $V' \times \mathbb{C}^m$. Noi affermiamo che la sua chiusura Y in $V \times \mathbb{C}^m$, è un insieme analitico in $V \times \mathbb{C}^m$.

Per dimostrare la nostra affermazione possiamo ridurci al caso in cui V sia irriducibile. Prendiamo $Y'_i \subset V' \times \mathbb{C}^m$ l'insieme analitico dei punti del tipo $(x, z_1, \dots, z_{i-1}, h_i(x), z_{i+1}, \dots, z_m)$, con $x \in V'$ e z_j arbitrari, e sia Y_i la chiusura di Y'_i in $V \times \mathbb{C}^m$.

Ovviamente $\dim Y_{i,a} = \dim (V \times \mathbb{C}^m)_a - 1 \forall a \in Y_i$. La stessa proprietà vale per l'insieme $Z_i \subset V \times \mathbb{C}^m$ definito come $Z_i = \{(x, z) | g_i(x)z_i = f_i(x)\}$. Ciò implica, per il Lemma 1.4.3, che Y_i è un insieme analitico, $\cap Y_i$ è analitico, e quindi ancora per il Lemma 1.4.3, Y è analitico.

Le h_i sono debolmente olomorfe, e quindi limitate in un intorno di a . Di conseguenza, se V è sufficientemente piccolo, $Y \subset V \times K$, con K compatto di \mathbb{C}^m . Allora la proiezione $\pi : Y \rightarrow V$ è una mappa propria, e quindi, se $x \in V$, $\pi^{-1}(x)$ è un sottoinsieme analitico compatto di $\{x\} \times \mathbb{C}^m$, e quindi è finito (Lemma 1.4.4).

Sia S il luogo dei punti singolari di V , $A = \pi^{-1}(S)$. Allora $V' = V \setminus S$, e $Y' = Y \setminus A$. Poichè h è olomorfa su V' , $\pi : Y' \rightarrow V'$ è un isomorfismo analitico. Inoltre $Y \setminus A$ è denso in Y . Allora per completare la dimostrazione è sufficiente dimostrare che, se W è un intorno di a sufficientemente piccolo, $\pi^{-1}(W)$ è uno spazio complesso normale.

Poiché ogni fibra di π ha un sistema fondamentale di intorni saturi, per il Lemma 1.4.5 basta dimostrare che Y è normale in ogni punto della fibra di a .

Prendiamo allora $y_0 \in \pi^{-1}(a)$. Sia $V_a = \cup V_{\nu,a}$ la decomposizione in componenti irriducibili di V_a , e V_ν insiemi analitici rappresentanti $V_{\nu,a}$. Per il Lemma 1.4.6 $\forall \nu \exists z_\nu = \lim_{x \in V_\nu \cap V'} h(x)$. $(x, z_\nu) \in Y$.

Innanzitutto vediamo che $z_\mu \neq z_\nu$ quando $\mu \neq \nu$. Basta infatti considerare la funzione g che vale 1 su V_μ e 0 su V_ν . g è ovviamente una funzione debolmente olomorfa, e quindi si può esprimere come $g = \sum u_i h_i$, dove le u_i sono funzioni olomorfe. Ma allora $\sum u_i(a)z_{\mu,i} = 1$ mentre $\sum u_i(a)z_{\nu,i} = 0$, per cui $z_\mu \neq z_\nu$.

È evidente sempre dal Lemma 1.4.6 che ogni intorno sufficientemente piccolo di D di (a, z_ν) si proietta su un intorno di a in V_ν . Sia ora φ olomorfa sull'insieme dei punti regolari di $D \cap Y$ e limitata. Ovviamente $\varphi \circ \pi^{-1}$ è olomorfa su $V' \cap V_\nu$ e limitata vicino a . Se noi consideriamo la funzione $\psi = \varphi \circ \pi^{-1}$ su $V' \cap V_\nu$, $\psi = 0$ su V_μ , $\mu \neq \nu$, $\psi \in \tilde{\mathcal{O}}_a$. Allora $\psi = \sum u_i h_i$, $h_i \in \mathcal{O}_a$. Quindi vicino $y_0 = (a, z_\nu)$, $\varphi = u_i(\pi(y))z_i$. Quindi φ è olomorfa su Y vicino ad y_0 , e quindi Y è normale in y_0 .

Q.E.D.

Capitolo 2

Desingularizzazione di superfici

2.1 Preliminari

Definizione 2.1.1 (Desingularizzazione) *Se V è uno spazio complesso una risoluzione (o desingularizzazione) delle singolarità di V consiste in una varietà M ed una mappa $\pi : M \rightarrow V$ che sia analitica propria, tale che π sia biolomorfa sull'immagine inversa di V^* e tale che $\pi^{-1}(V^*)$ sia denso in M .*

Osservazione 2.1.1 *Una risoluzione di una normalizzazione è a sua volta una risoluzione.*

Ovviamente quindi, ci preoccupiamo di risolvere solo le superfici normali, dato che saper desingularizzare queste vuole dire, per l'osservazione 2.1.1 ed il Teorema 1.4.1, saperle desingularizzare tutte.

Ci interessiamo innanzitutto di riuscire a trovare una buona proiezione della superficie in \mathbb{C}^2 . Per fare questo abbiamo bisogno del seguente

Lemma 2.1.1 *Sia X varietà complessa.*

Siano Y, Z sottospazi complessi chiusi di X .

Supponiamo poi $Y \setminus Z$ avere dimensione r in ogni punto.

Allora $\Delta = \overline{Y \setminus Z} \cap Z$ è uno spazio complesso chiuso le cui componenti irriducibili hanno dimensione $\leq r - 1$.

Dimostrazione:

Per il Lemma 1.4.3, $\overline{Y \setminus Z}$ è un sottospazio complesso di X .

Qual'è la dimensione di $\overline{Y \setminus Z}$?

Ovviamente tutte le componenti irriducibili di $\overline{Y \setminus Z}$ non contenute in Z hanno dimensione r . Se $\overline{Y \setminus Z}$ avesse altre componenti connesse $\overline{Y \setminus Z}$ privato di queste sarebbe un chiuso contenuto propriamente in $\overline{Y \setminus Z}$ e contenente $Y \setminus Z$, il che è assurdo.

Quindi $\overline{Y \setminus Z}$ ha dimensione r .

$\overline{Y \setminus Z} \cap Z$ è un insieme analitico, che non contiene nessuna componente di $\overline{Y \setminus Z}$. Ogni componente irriducibile di $\overline{Y \setminus Z} \cap Z$ è un sottoinsieme analitico proprio di una singola componente irriducibile di $\overline{Y \setminus Z}$, e quindi ha dimensione strettamente minore.

Q.E.D.

Teorema 2.1.1 *Sia $X \subset \Omega \subset \mathbb{C}^3$ insieme analitico di dimensione 2 con una singolarità normale (e quindi isolata) nell'origine.*

Se $r \in \mathbb{C}\mathbb{P}^2$, sia $\pi_r : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2$ la proiezione associata a questa direzione.

Esistono $r \in \mathbb{C}\mathbb{P}^2$, Ω' intorno aperto dell'origine in \mathbb{C}^3 , tali che, $\pi_r|_{X \cap \Omega'}$ sia un rivestimento finito di grado s , ramificato su un curva Γ e tale che $\forall x \in \Gamma \setminus \{0\}$, $\#\pi_r^{-1}(x) = s - 1$.

Dimostrazione:

X è descritto da un equazione del tipo $F = F_h + F_{h+1} + \dots = 0$, con F_i polinomio omogeneo di grado i , $F_h \neq 0$. Posso supporre F privo di fattori multipli in \mathcal{O}_3 .

$F_h = 0$ è un polinomio omogeneo di grado h e quindi la sua proiezione su $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ descrive una curva γ_0 . Quindi per il Teorema di preparazione di Weiestrass $\forall r \notin \gamma$, π_r è un rivestimento ramificato di grado h in un intorno dell'origine.

Tuttavia non tutte queste direzioni sono buone per il teorema. Per la precisione dobbiamo ancora escludere le direzioni per le quali, in un qualunque intorno dell'origine, abbiamo rette tangenti alla superficie con intersezione maggiore di 2, e quelle per le quali, sempre in un qualunque intorno dell'origine, abbiamo rette tangenti in più punti.

Innanzitutto osservo che posso supporre che nessuna componente di X sia un sottospazio vettoriale di dimensione 2 di \mathbb{C}^3 . In tal caso infatti io posso limitarmi a studiare la superficie ottenuta considerando solo le altre componenti connesse, dato che queste mi danno come unica condizione la necessità di escludere le direzioni tangenti a questi piani, che sono già contenute in γ_0 .

Per quanto riguarda il primo caso osserviamo che si tratta di vedere le direzioni r che in qualche punto x vicino all'origine verificano $r \subset T_x(X)$, $r^t H_F(x) r = 0$, dove con $H_F(x)$ indichiamo l'Hessiano della funzione F nel punto x . Se $v^t H_F(x) v = 0 \forall v \in T_x(X)$ in tutto un intorno di un certo punto $x \in X$, allora lo è su tutto il ramo della superficie su cui si trova x , che risulta essere un piano, caso che noi abbiamo escluso.

Su ogni altra componente irriducibile della superficie, $v^t H_F(x) v = 0 \forall v \in T_x(X)$ descrive un sottoinsieme analitico proprio, le cui componenti quindi possono avere al più dimensione 1. Sia allora δ il suddetto sottoinsieme analitico.

Consideriamo $T \subset \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ formato da tutte le coppie (x, v) , $x \in X$, v tangente ad X .

T è per definizione uno spazio complesso. Lo stesso vale per $T' \subset T$, cioè T ristretto ai punti di δ . È inoltre ovviamente uno spazio complesso anche $Z = \{0\} \times \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \subset \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^2$.

T' e Z sono allora due sottospazi complessi di $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^2$, e quindi posso applicare su di loro il Lemma 2.1.1 ed ottenere che $\overline{T' \setminus Z}$ è uno spazio complesso di dimensione 2, $\overline{T' \setminus Z} \cap Z$ è uno spazio analitico le cui componenti connesse hanno al più dimensione 1. Sia γ_1 questo nuovo insieme analitico, $\gamma_1 \subset Z \cong \mathbb{C}\mathbb{P}^2$.

Al di fuori di δ , per ogni punto abbiamo uno o due vettori isotropi per la forma $H_F(x)$; uno se in quel punto la forma è degenere, due altrimenti.

Sia allora $T'' \subset T$, l'insieme di tutte le coppie formate da un punto e da un suo vettore tangente isotropo. Stavolta però considero come varietà complessa $M'' = (\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^2) \setminus (\overline{T' \setminus Z})$, $Z'' = Z \cap M''$. Ancora per il Lemma 2.1.1 $\overline{T'' \setminus Z''}$ (stavolta la chiusura si intende in M'') è uno spazio complesso di dimensione 2, e $\overline{T'' \setminus Z''} \cap Z''$ è un sottospazio complesso di $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ che chiameremo γ_2 , le cui componenti irriducibili hanno al più dimensione 1.

Allora $\forall r \notin \gamma = \gamma_0 \cup \gamma_1 \cup \gamma_2, \exists U$ intorno dell'origine in \mathbb{C}^3 , tale che π_r è un rivestimento ramificato di grado h , e non esiste una retta tangente in un punto di $X \cap U$ parallela ad r , che abbia tangenza superiore a 2.

Resta però il problema che alcune di queste direzioni possono ancora dare origine a rette parallele in più punti.

Consideriamo allora il sottoinsieme di T formato da tutti i punti della forma (x, v) , $x \in X$, $v \in T_x(X)$, con la proprietà che la retta tangente X nel punto x parallela a v , sia tangente anche in un altro punto.

Questo è un sottospazio complesso che chiameremo T''' le cui componenti connesse hanno tutte al più dimensione 2, e quindi, chiamando $\gamma_3 = \overline{T'''} \setminus \overline{Z} \cap Z$, γ_3 è un sottospazio complesso di $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ le cui componenti hanno al più dimensione 1.

Allora $\forall r \notin \overline{\gamma} = \gamma \cup \gamma_3$, $\exists \Omega'$ intorno dell'origine in \mathbb{C}^3 , tale che $\pi_r|_{\Omega' \cap X}$ verifica le ipotesi del teorema.

Q.E.D.

In realtà è possibile dimostrare con la medesima tecnica (sostituendo \mathbb{C}^3 con \mathbb{C}^n , e $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ con la Grassmaniana degli $(n-2)$ -piani in \mathbb{C}^n) il più generale

Teorema 2.1.2 *Sia $X \subset \Omega \subset \mathbb{C}^n$ insieme analitico di dimensione 2 con una singolarità normale (e quindi isolata) nell'origine.*

Se r elemento della Grassmaniana degli $(n-2)$ -piani in \mathbb{C}^n , sia $\pi_r : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^2$ la proiezione associata a questa direzione.

Esistono r , Ω' intorno aperto dell'origine in \mathbb{C}^n , tali che, $\pi_r|_{X \cap \Omega'}$ sia un rivestimento finito di grado s , ramificato su una curva Γ e tale che $\forall x \in \Gamma$, $\#\pi_r^{-1}(x) = s - 1$.

2.2 Tecnica di desingularizzazione

Il problema di desingularizzare superfici normali è stato completamente risolto da alcuni decenni. Il lettore interessato potrà trovarne una chiara dimostrazione ed esposizione in chiave moderna della tecnica di desingularizzazione nel libro di Laufer indicato in bibliografia ([L]). In questa sezione noi non dimostriamo il teorema di desingularizzazione, ma cercheremo solo di ripercorrere nelle sue linee generali la tecnica di desingularizzazione che si desume dalla dimostrazione del teorema.

Basta studiare il problema in un intorno dell'origine (dove supponiamo ci sia la singolarità). È infatti evidente che una superficie normale, e quindi con singolarità isolate può essere desingularizzata risolvendo ciascuna singolarità indipendentemente dalle altre.

Sia allora $V \subset \mathbb{C}^n$ superficie analitica normale con un'unica singolarità nell'origine. Per il teorema 2.1.1 è sempre possibile trovare una applicazione $\pi : V \rightarrow \mathbb{C}^2$ che sia un rivestimento analitico finito ramificato in una curva algebrica Γ che, se la nostra superficie era singolare nell'origine, sarà al più singolare nell'origine.

Diremo che una superficie V' *domina* V se $\exists \varphi : V' \rightarrow V$ analitica propria tale che $\exists V^*$ denso in V con $\varphi|_{\varphi^{-1}(V^*)}$ biolomorfa, e $\varphi^{-1}(V^*)$ denso in V' .

Sia U intorno sferico dell'origine in \mathbb{C}^2 (con coordinate (z_1, z_2)).

Consideriamo ora le due mappe $\psi_1 : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, $\psi_2 : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ seguenti:

$$\psi_1 : (z'_1, z'_2) \mapsto (z'_1 z'_2, z'_2)$$

$$\psi_2 : (z''_1, z''_2) \mapsto (z''_2, z''_1 z''_2).$$

Sia $U' = \psi_1^{-1}(U)$ e $U'' = \psi_2^{-1}(U)$.

Consideriamo quindi la varietà X formata dalle due carte U' e U'' con coordinate rispettivamente (z'_1, z'_2) , e (z''_1, z''_2) e dalla mappa di cambio di coordinate $\varphi : U' \setminus \{z'_1 = 0\} \rightarrow U'' \setminus \{z''_1 = 0\}$, definita come $\varphi(z'_1, z'_2) = ((z'_1)^{-1}, z'_1 z'_2)$. Questa nuova varietà viene usualmente chiamata *scoppiamento* di \mathbb{C}^2 .

Ho una mappa $\tilde{\psi} : X \rightarrow \mathbb{C}^2$ indotta naturalmente dalle ψ_i . Sia V' prodotto fibrato di V e X , ossia $V' \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, v) \in X \times V \mid \tilde{\psi}(x) = \pi(v)\}$. Chiameremo rispettivamente π_1 e π_2 le proiezioni naturali di V' su X e V . Sia $\psi \equiv \tilde{\psi} \circ \pi_1 \equiv \pi \circ \pi_2$.

Abbiamo ottenuto il diagramma in figura.

$$\begin{array}{ccc} V' & \xrightarrow{\pi_2} & V \\ \pi_1 \downarrow & \searrow \psi & \downarrow \pi \\ X & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{C}^2 \end{array}$$

Chiameremo quest'operazione *pseudoscoppiamento*.

Iterando questo procedimento arriveremo ad avere una superficie \tilde{V} ed una mappa $\tilde{\pi} : \tilde{V} \rightarrow M$, con M varietà complessa di dimensione 2, che si ramifica su un sistema di curve che chiameremo Δ , in maniera che Δ sia un'unione finita di curve lisce con la proprietà che due qualunque di esse o non si intersecano o si intersecano trasversalmente in un solo punto, ed inoltre una qualunque terna di esse ha intersezione nulla.

Inoltre \tilde{V} *domina* V . Δ è una curva non liscia ma con singolarità molto semplici (solo del tipo $xy = 0$). È facilmente verificabile che la superficie \tilde{V} è sempre liscia non solo com'è ovvio sulla controimmagine per $\tilde{\pi}$ del complemen-

tare di Δ ma anche sulla controimmagine dei punti lisci di Δ (questo deriva direttamente dalla classificazione dei rivestimenti finiti di $D^2 \times (D^2 \setminus \{0\})$).

Sulla controimmagine dei punti singolari invece non abbiamo nessuna certezza di avere solo punti lisci, ma siamo in grado di risolvere le singolarità tramite ulteriori trasformazioni della superficie \tilde{V} .

Infatti, il complementare di Δ in un intorno di un suo punto singolare, è $\mathbb{C}^2 \setminus \{xy = 0\}$. Ma noi conosciamo tutti i rivestimenti finiti di $\mathbb{C}^2 \setminus \{xy = 0\}$, e sappiamo che si tratta di alcuni (non è garantita la connessione del rivestimento localmente) $\mathbb{C}^2 \setminus \{xy = 0\}$ che si proiettano ciascuno con un applicazione del tipo $(\xi, \eta) \mapsto (\xi^\alpha \eta^\beta, \xi^\gamma \eta^\delta)$.

Questo rivestimento è lo stesso che è associato all'applicazione ottenuta allo stesso modo sostituendo ad α, γ rispettivamente $\alpha - \nu\beta$ e $\gamma - \nu\delta$ per qualche intero ν o equivalentemente sostituendo a β, δ rispettivamente $\beta - \nu\alpha$ e $\delta - \nu\gamma$; è anche lo stesso che si ottiene componendolo con gli automorfismi $(\xi, \eta) \mapsto (\frac{1}{\xi}, \eta)$ o $(\xi, \eta) \mapsto (\xi, \frac{1}{\eta})$. In tal modo con un meccanismo simile all'algoritmo di Euclide posso sempre ridurmi ad una applicazione della forma $(\xi, \eta) \mapsto (\xi^\sigma, \xi^\alpha \eta^\beta)$, che scriveremo, se $\omega = (\alpha, \beta)$, $a = \frac{\alpha}{\omega}$ e $b = \frac{\beta}{\omega}$, della forma $(\xi, \eta) \mapsto (\xi^\sigma, (\xi^a \eta^b)^\omega)$.

Se $a \neq 0$ la singolarità si può risolvere con l'aiuto della varietà $M(k_1, \dots, k_s)$ dove i k_i sono tutti numeri interi piú grandi di 2, e sono gli unici tali che $\frac{b}{a} = k_1 - \frac{1}{k_2 - \frac{1}{k_3 - \dots - \frac{1}{1 - \frac{1}{k_s}}}}$.

La varietà $M(k_1, \dots, k_s)$ si costruisce con l'atlante formato dalle carte U_0, \dots, U_s con coordinate rispettivamente $(u_0, v_0), \dots, (u_s, v_s)$, e dalle seguenti mappe di cambiamento di coordinate:

$$\begin{aligned} U_0 \cap U_1 &= \{u_0 \neq 0\} & u_1 &= \frac{1}{u_0} & v_1 &= u_0^{k_1} v_0 \\ U_1 \cap U_2 &= \{v_1 \neq 0\} & v_2 &= \frac{1}{v_1} & u_2 &= v_1^{k_2} u_1 \\ U_2 \cap U_3 &= \{u_2 \neq 0\} & u_3 &= \frac{1}{u_2} & v_3 &= u_2^{k_3} v_2 \\ & & \vdots & & \vdots & \\ & & \vdots & & \vdots & \end{aligned}$$

La risoluzione si ottiene sostituendo ad un intorno della singolarità la varietà $M(k_1, \dots, k_s)$ con la mappa di cambio di coordinate $(u, v) = (u_0, v_0)$.

Nel caso in cui $a = 0$ la singolarità si risolve tramite la varietà $M(\emptyset)$ che altro non è che \mathbb{C}^2 .

A questo punto siamo in grado di dire qual'è il sistema di curve che abbiamo "aggiunto" sulla superficie per ottenere la risoluzione, ossia di quante e quali (a livello di genere) curve è composto ed inoltre di conoscere anche la loro

matrice di intersezione, che significa sapere quali curve si intersecano (in tal caso per costruzione avremo sempre intersezioni semplici che significa, a livello di matrice di intersezione, che avremo sempre intersezione 1) e quali no (in tal caso 0), e l'autointersezione di ciascuna curva, che altro non è che la sua classe di Chern.

Quest'ultimo dettaglio descrive il fibrato normale a ciascuna curva, e quindi di fatto tutta la nuova superficie, dalla quale possiamo ritrovare la vecchia semplicemente quotizzando tutto il sistema di curve ad un punto.

In sintesi quindi siamo in grado di riconoscere le singolarità, semplicemente conoscendo questo sistema di curve con la sua matrice di intersezione. Vediamo ora come è possibile trovare questi dati.

Studiando il rivestimento del complementare del luogo di ramificazione nei pressi dei punti lisci dello stesso, posso scoprire facilmente di quante componenti è fatta l'immagine inversa di ciascuna curva, e ciascuna di queste come si ramifica sulla curva studiata; quindi ne possiamo ricavare il genere grazie alla formula di Hurewicz; inoltre per quanto riguarda la matrice di intersezione, facili osservazioni porteranno a comprendere se due curve si intersecano o meno (0 o 1) mentre per il calcolo dell'autointersezione, se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indica la forma di intersezione, ci si può servire dell'importante aiuto che può fornire il seguente teorema, dimostrato in [L]

Teorema 2.2.1 *Sia (f) il divisore associato ad una funzione meromorfa sulla superficie complessa M , A un suo sottoinsieme analitico compatto liscio monodimensionale, allora: $\langle A, (f) \rangle = 0$*

Al di sopra dei punti singolari invece nel momento in cui risolviamo con la varietà $M(k_1, \dots, k_s)$ aggiungiamo $s \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ tali che ciascuno abbia autointersezione $-k_i$ e, fra di loro, ciascuno intersechi solo il precedente ed il successivo, mentre possiamo facilmente ricostruire le intersezioni tra loro e le altre curve semplicemente studiando le carte.

In conclusione, noi siamo in grado di associare ad una superficie normale X , una quaterna (I, J, g, c) , dove I è l'insieme finito delle componenti irriducibili di Δ , $J \subset \frac{(I \times I) \setminus \{(x,x) | x \in I\}}{\langle (x,y)=(y,x) \rangle}$ è l'insieme di tutte le coppie di componenti irriducibili di Δ aventi intersezione 1, $g : I \rightarrow \mathbb{N}$ è la mappa che associa ad ogni componente il suo genere, e $c : I \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$ è la mappa che associa ad ogni componente l'opposto della sua autointersezione.

Inoltre questa quaterna ha le proprietà che I, J formano un grafo connesso, e la matrice di intersezione che si può dedurre è definita negativa.

Viceversa, fissata una tale quaterna, non abbiamo una sola superficie che può averla generata nel modo descritto, ma dobbiamo solo stabilire di quali curve si tratta (due curve con lo stesso genere non sono, in generale, biolomorfe).

Sia \mathcal{M} l'insieme di queste quaterne.

Osserviamo che questo procedimento non è univoco. Se facciamo uno pseudoscoppiamento in più del necessario, continuando il procedimento otterremo una risoluzione differente ma più complessa della stessa singolarità.

Spesso non è facile rendersi conto se due quaterne corrispondono o meno alla stessa singolarità. Quello che però sappiamo è che data una quaterna associata alla risoluzione di una singolarità, se effettuiamo uno scoppiamento in un punto di intersezione tra due curve otteniamo una nuova quaterna. Cerchiamo di descrivere la nuova quaterna (I', J', g', c') a partire da quella vecchia.

Siano allora A, B le due curve delle quali abbiamo scoppiato l'intersezione, C il \mathbb{CP}^1 generato dallo scoppiamento. Allora $I' = I \cup \{C\}$; $J' = J \setminus (A, B) \cup (A, C) \cup (B, C)$; $g'|_I \equiv g$, $g'(C) = 0$; $c'|_{I \setminus \{A, B\}} \equiv c$, $c'(A) = c(A) + 1$, $c'(B) = c(B) + 1$, $c'(C) = 1$.

La stessa cosa può succedere se facciamo uno scoppiamento su un punto che appartiene ad una sola componente irriducibile di Δ .

Sia allora A la componente scoppiata, C quella aggiunta con lo scoppiamento; otteniamo $I' = I \cup \{C\}$; $J' = J \cup (A, C)$; $g'|_I \equiv g$, $g'(C) = 0$; $c'|_{I \setminus \{A\}} \equiv c$, $c'(A) = c(A) + 1$, $c'(C) = 1$.

Diremo che una quaterna è espansione di un'altra quaterna se è ottenibile da questa con una delle due operazioni descritte. Diremo anche che la seconda quaterna è una contrazione della prima.

Da ora in poi considereremo l'insieme delle quaterne modulo la relazione d'equivalenza indotta da espansioni e contrazioni dato che per definizione, se da una quaterna posso arrivare ad un'altra tramite un numero finito di contrazioni ed espansioni, le due provengono dalla stessa superficie.

Per chiarire il meccanismo nei dettagli è però meglio fare qualche esempio.

2.3 Primo esempio

Consideriamo la superficie algebrica descritta in \mathbb{C}^3 dall'equazione $z^2 = x(x^2 + y^2)$. Proiettando questa superficie sul piano complesso (x, y) abbiamo

un rivestimento a due fogli ramificato su $\Gamma = \{x(x^2 + y^2) = 0\}$.

Opero il primo pseudoscoppiamento.

$$\text{Sia } (x, y) = (\xi\zeta, \zeta) = (\zeta', \xi'\zeta')$$

$$\text{A questo punto } V' \text{ é data da } z^2 = \xi\zeta(\zeta^2 + \xi^2\zeta^2) = \xi\zeta^3(1 + \xi^2)$$

e da

$$z^2 = \zeta'(\zeta'^2 + \xi'^2\zeta'^2) = \zeta'^3(1 + \xi'^2).$$

Il \mathbb{CP}^1 aggiunto é descritto dall'equazione $A_1 = \{\zeta = \zeta' = 0\}$.

Ovviamente il rivestimento di A_1 é ad un foglio e quindi la sua controimmagine é un \mathbb{CP}^1 .

Inoltre il nuovo luogo di ramificazione ha tre punti singolari tutti del tipo desiderato. Ora devo studiarli tutti cominciando dal punto dove l'equazione é in coordinate locali $z^2 = \xi\zeta^3$.

Studio il rivestimento restringendomi a $|\xi| = |\zeta| = 1$.

L'applicazione $(\xi, \zeta, z) \mapsto (e^{2\pi i\theta}, e^{2\pi i\phi}, e^{\pi i\theta + 3\pi i\phi})$ esprime la superficie come immagine del rivestimento universale di $|\xi| = |\zeta| = 1$. Il reticolo é lo stesso del rivestimento equivalente $(u, v) = (e^{\pi i(\theta - \phi)}, e^{2\pi i\phi})$. La relazione tra i due rivestimenti é $\zeta = v, \xi = u^2v, z = uv^2$. La varietà da aggiungere é quindi $M(2)$. Analoghi ragionamenti portano allo stesso risultato negli altri due casi; chiameró A_2, A_3, A_4 le tre curve (\mathbb{CP}^1) aggiunte in tal modo. La matrice di intersezione diventa:

$$\begin{pmatrix} ? & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Bisogna ora completare la matrice.

Applico il teorema 2.2.1. alla funzione z .

Studiando localmente mi accorgo che questa funzione si annulla di ordine 3 su A_1 e di ordine 2 su $A_2, A_3, e A_4$.

$$\text{Quindi } 0 = \langle (z), A_1 \rangle =$$

$$= 3 \langle A_1, A_1 \rangle + 2 \langle A_1, A_2 \rangle + 2 \langle A_1, A_3 \rangle + 2 \langle A_1, A_4 \rangle =$$

$$= 3 \langle A_1, A_1 \rangle + 6 \Rightarrow \langle A_1, A_1 \rangle = -2, \text{ e quindi la matrice é}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

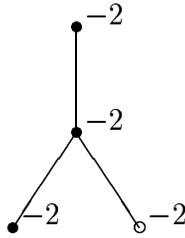


Figura 2.1: Grafo associato alla superficie $z^2 = x(x^2 + y^2)$

Una buona rappresentazione grafica del sistema di curve può essere quello indicato in figura 2.1.

2.4 Secondo esempio

Prendiamo come secondo esempio $V = \{z^2 = (x + y^2)(x^2 + y^7)\}$. Il luogo di ramificazione della proiezione da V nel piano indotta da quella da \mathbb{C}^3 a \mathbb{C}^2 , $\pi : (x, y, z) \mapsto (x, y)$ è esattamente l'unione di due curve singolari che si intersecano nell'origine, e che sono esattamente la parabola $x + y^2 = 0$ e la "cuspidale" $x^2 + y^7 = 0$. Per successive trasformazioni quadratiche ottengo:

$$(x, y) = (\xi\zeta, \zeta) = (\zeta', \xi'\zeta').$$

e l'equazione diventa nelle due carte rispettivamente:

$$z^2 = (\xi\zeta + \zeta^2)(\xi^2\zeta^2 + \zeta^7) = \zeta^3(\xi + \zeta)(\xi^2 + \zeta^5)$$

e

$$z^2 = (\zeta' + \zeta'^2\xi'^2)(\zeta'^2 + \xi'^7\zeta'^7) = \zeta'^3(1 + \xi'^2\zeta')(1 + \xi'^7\zeta'^5)$$

dove abbiamo aggiunto al luogo di ramificazione la retta proiettiva

$$A_1 = \{\zeta = \zeta' = 0\}.$$

Ovviamente le singolarità del nuovo luogo di ramificazione, come si desume dalle equazioni, sono tutte nella prima carta quindi procediamo studiando questa e tralasciando l'altra.

Appare evidente a questo punto che il luogo di ramificazione è composto da tre curve, ossia A_1 di cui ho già scritto l'equazione, la retta $\xi + \zeta = 0$ e la nuova "cuspidale" $\xi^2 + \zeta^5 = 0$.

$$\text{Scoppiamo ancora: } (\xi, \zeta) = (\sigma\tau, \tau) = (\tau', \sigma'\tau')$$

L'equazione diventa:

$$z^2 = \tau^3(\sigma\tau + \tau)(\sigma^2\tau^2 + \tau^5) = \tau^6(\sigma + 1)(\sigma^2 + \tau^3)$$

e

$$z^2 = \sigma'^3\tau'^3(\tau' + \sigma'\tau')(\tau'^2 + \sigma'^5\tau'^5) = \sigma'^3\tau'^6(1 + \sigma')(1 + \sigma'^5\tau'^3),$$

e la curva aggiunta è

$$A_2 = \{\tau = \tau' = 0\}$$

È una semplice osservazione il fatto che ora i punti singolari sono tre e di questi uno solo non è della forma desiderata, che è l'origine della prima carta ($\sigma = \tau = 0$) dove si incontrano sia la curva A_2 che uno dei due rami della curva di ramificazione originaria che è ora una vera cuspid $\sigma^2 + \tau^3 = 0$.

Procediamo ovviamente scoppiando ora questo punto:

$$(\sigma, \tau) = (st, t) = (t', s't')$$

Localmente la singolarità è del tipo

$$z^2 = \tau^6(\sigma^2 + \tau^3).$$

L'equazione diventa:

$$z^2 = t^6(s^2t^2 + t^3) = t^8(s^2 + t)$$

o anche

$$z^2 = s'^6t'^6(t'^2 + s'^3t'^3) = s'^6t'^8(1 + s'^3t')$$

ed abbiamo creato

$$A_3 = \{t = t' = 0\}$$

È facile osservare che la singolarità scoppiata ha dato origine a due singolarità di cui ancora una volta solo una non è del tipo desiderato, ed è nel punto $s = 0, t = 0$ dove si incontrano A_3 e quel ramo della curva originaria che abbiamo appena risolto e che ora è liscio, ma queste due curve non si incontrano trasversalmente.

Procedo ancora scoppiando quest'altro punto:

$$(s, t) = (\alpha\beta, \beta) = (\beta', \alpha'\beta').$$

L'equazione diventa:

$$z^2 = \beta^8(\alpha^2\beta^2 + \beta) = \beta^9(1 + \alpha^2\beta)$$

e

$$z^2 = \alpha'^8\beta'^8(\beta'^2 + \alpha'\beta') = \alpha'^8\beta'^9(\alpha' + \beta')$$

ed abbiamo creato

$$A_4 = \{\beta = \beta' = 0\}$$

La nostra singolarità scoppiata ha dato origine questa volta ad una singola singolarità fatta da curve lisce che si incontrano trasversalmente, ma questa volta il problema è che sono troppe, ossia ci sono ben tre curve che passano per il punto $\alpha' = \beta' =$ cioè A_3, A_4 e B_2 , che è l'unico ramo della curva originaria che in questo momento sto studiando (l'altro lo chiamerò B_1).

Procedo con un'altra (l'ultima) trasformazione:

$$(\alpha', \beta') = (qr, r) = (r', q'r')$$

L'equazione diventa:

$$z^2 = q^8 r^8 r^9 (qr + r) = q^8 r^{18} (q + 1)$$

e

$$z^2 = r'^8 q'^9 r'^9 (r' + q'r') = q'^9 r'^{18} (1 + q')$$

ed è facile osservare che questa volta abbiamo ottenuto tre punti singolari ma tutti del tipo giusto.

Riassumendo la nuova superficie si proietta su una particolare varietà che abbiamo appena costruito con ramificazione su un sistema di 7 curve $(A_1, \dots, A_5, B_1, B_2)$ e tale che

$\langle B_1, A_2 \rangle = \langle A_1, A_2 \rangle = \langle B_2, A_5 \rangle = \langle A_4, A_5 \rangle = \langle A_3, A_5 \rangle =$
 $= \langle A_2, A_3 \rangle = 1$ mentre tutte le altre intersezioni tra coppie di curve differenti sono nulle.

Ci sono quindi ben sei punti di intersezione da studiare uno per uno.

Dopo averli studiati arriviamo alla conclusione che nei primi quattro casi la superficie è risolta da $M(\phi)$, e cioè non c'è da aggiungere nessuna curva; nei restanti due casi la superficie è localmente composta da due rami lisci.

Quello che ora vogliamo conoscere è il sistema di curve che abbiamo aggiunto sulla superficie per risolverla con la sua matrice di intersezione.

Si tratta di studiare la controimmagine del sistema di curve appena descritto.

Risulta immediato notare che la proiezione determina un rivestimento ad un foglio tanto su A_1 quanto su A_4 le cui controimmagini \tilde{A}_1, \tilde{A}_4 sono quindi dei \mathbb{CP}^1 , mentre su A_2 si tratta di un rivestimento a due fogli con due punti di ramificazione, per cui dalla formula di Hurewicz per il genere scopriamo che anche \tilde{A}_2 è un \mathbb{CP}^1 e lo stesso discorso vale per A_5 , mentre per A_3 le cose sono differenti perché il rivestimento ha due componenti connesse che risultano essere due rette proiettive che non si intersecano, e che chiameremo A_{31} e A_{32} .

Per quanto riguarda la forma di intersezione è immediato osservare che

$$\begin{aligned} &\langle \tilde{A}_1, \tilde{A}_2 \rangle = \langle \tilde{A}_2, A_{31} \rangle = \langle \tilde{A}_2, A_{32} \rangle = \langle \tilde{A}_5, A_{31} \rangle = \langle \tilde{A}_5, A_{32} \rangle = \\ &= \langle \tilde{A}_5, \tilde{A}_4 \rangle = 1 \end{aligned}$$

mentre tutte le altre valgono 0.

Per quanto riguarda le autointersezioni, le calcoliamo come nell'esempio più semplice servendoci della funzione z .

Otteniamo:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{A}_1, \tilde{A}_1 \rangle &= -1 \\ \langle \tilde{A}_2, \tilde{A}_2 \rangle &= -4 \\ \langle A_{31}, A_{31} \rangle &= -3 \\ \langle A_{32}, A_{32} \rangle &= -3 \\ \langle \tilde{A}_4, \tilde{A}_4 \rangle &= -1 \\ \langle \tilde{A}_5, \tilde{A}_5 \rangle &= -2. \end{aligned}$$

Ma noi sappiamo che contrarre ad un punto in una superficie liscia un \mathbb{CP}^1 con autointersezione -1 mantiene liscia la superficie, per cui possiamo contrarre \tilde{A}_1 e \tilde{A}_4 e la nuova matrice di intersezione tra le quattro curve superstiti (nell'ordine $\tilde{A}_2, A_{31}, \tilde{A}_5, A_{32}$) è ottenuta estraendo dalla precedente la parte relativa alle curve superstiti ed aumentando di uno l'autointersezione delle curve che intersecavano le curve contratte, e cioè esattamente:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

È ora \tilde{A}_5 a dover essere cancellato e la matrice di intersezione diventa:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Il sistema di curve ottenuto è allora ben visualizzato dalla figura 2.2.

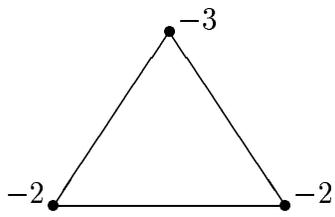


Figura 2.2: Grafo associato alla superficie $z^2 = (x + y^2)(x^2 + y^7)$.

Capitolo 3

Procedimento inverso

3.1 Preliminari

Abbiamo visto nel primo paragrafo dello scorso capitolo che se $a \in X$ superficie analitica normale, esiste U intorno di a in X , ed una proiezione φ di U su un intorno dell'origine in \mathbb{C}^2 che sia un rivestimento finito ramificato su una curva Γ singolare al più nell'origine, e avente solo ramificazione semplice nei suoi punti lisci. Chiameremo una siffatta coppia (X, φ) , τ -rivestimento.

Cerchiamo in questo capitolo di ripercorrere il procedimento all'inverso, ossia di stabilire, data una tale curva in \mathbb{C}^2 , quali e quante superfici possono essere proiettate su \mathbb{C}^2 , in modo che la coppia formata dalla superficie e dalla proiezione sia un τ -rivestimento ramificato su di essa.

Per far ciò abbiamo bisogno di alcune osservazioni preliminari.

Sia Ω aperto contenente l'origine in \mathbb{C}^2 .

Sia Γ curva per l'origine in Ω .

Definizione 3.1.1 *Se x è un punto liscio di Γ , chiameremo $S_{\varepsilon, x}$ la fibra di x nel fibrato su X a fibra S^1 di raggio ε indotto dal fibrato normale alla curva in \mathbb{C}^2 visto come sottoinsieme di \mathbb{C}^2 .*

Diremo che $\gamma \in \pi_1(\Gamma^c)$ è un laccio geometrico se esiste $x \in \Gamma$ liscio tale che $\forall \varepsilon \ll 1$, γ è omotopo ad un cammino chiuso ottenuto componendo un cammino τ di vertici il punto base e un punto di $S_{\varepsilon, x}$ con un loop che percorra una volta $S_{\varepsilon, x}$, e poi ancora con τ^{-1} .

Osservazione 3.1.1 Dato un τ -rivestimento (X, φ) , i lacci geometrici agiscono sulla fibra del punto base come trasposizioni.

A questo punto ci interessa sapere, per un qualunque omomorfismo del $\pi_1(\Omega \setminus \Gamma)$ che manda i lacci geometrici in trasposizioni, quanti τ -rivestimenti esistono che realizzano quest'azione sulla fibra del punto base.

3.2 Rivestimento di $\Omega \setminus \Gamma$

Lemma 3.2.1 Sia G sottogruppo di \mathcal{S}_n . Sia inoltre G transitivo e generato da trasposizioni.

Allora $G = \mathcal{S}_n$.

Dimostrazione:

Basta osservare che in queste ipotesi $(i, j) \in \mathcal{S}_n \forall i, j$. Infatti, per ogni coppia i, j , essendo G transitivo e generato da trasposizioni posso trovare in G delle trasposizioni $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ tali che

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= (i, i_1), \\ \sigma_2 &= (i_1, i_2), \\ &\vdots \\ \sigma_k &= (i_{k-1}, i_k), \\ &\vdots \\ \sigma_n &= (i_{n-1}, j). \end{aligned}$$

Allora

$$\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1} \sigma_n \sigma_{n-1} \cdots \sigma_1 = (i, j).$$

A questo punto la tesi è banale perché ogni permutazione si può canonicamente scrivere come prodotto di cicli e ciascun ciclo è facilmente scrivibile come prodotto di trasposizioni $((i_1, \dots, i_n) = (i_1, i_2)(i_1, i_3) \cdots (i_1, i_n))$.

Q.E.D.

Teorema 3.2.1 Sia $f : G = \pi_1(\Gamma^c) \rightarrow \mathcal{S}_n$ un omomorfismo surgettivo che manda i lacci geometrici in trasposizioni. Allora ho un rivestimento ad n fogli di $\Omega \setminus \Gamma$ tale che l'azione naturale del $\pi_1(\Gamma^c)$ sulla fibra del punto base è esattamente quella descritta dalla funzione f .

Dimostrazione:

Considero $\mathcal{S}_{n-1} \subset \mathcal{S}_n$ il sottogruppo formato da tutte le permutazioni che non spostano 1.

Sia $H = f^{-1}(\mathcal{S}_{n-1})$.

H é un sottogruppo di G , e quindi possiamo considerare la superficie connessa V ed il rivestimento $\pi : V \rightarrow \Gamma^c$ associati a questo sottogruppo (cioè tale che $H = \pi_*(\pi_1(V))$).

H ha indice n in G , quindi il rivestimento ha n fogli.

A questo punto possiamo scegliere $n - 1$ lacci geometrici $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$ in modo che $f(\gamma_i) = (1, i + 1)$.

Sia σ_i l'azione sulla fibra del punto base di γ_i dove abbiamo chiamato 1 il punto base su V .

Poiché $\gamma_i^2 \in H$ sarà $\sigma_i = (1, k_i)\tau_i$ con τ_i permutazione che lascia fissi tanto 1 quanto k_i . $f(\gamma_i\gamma_j\gamma_i^{-1}) = (i+1, j+1) \Rightarrow \gamma_i\gamma_j\gamma_i^{-1} \in H$. Se σ_{iji} è la permutazione associata a questo cammino, essa deve lasciar fermo 1.

Ma $\sigma_{iji} = \sigma_i\sigma_j\sigma_i = (1, k_i)\tau_i(1, k_j)\tau_j(1, k_i)\tau_i$.

Ci sono da analizzare tre casi:

$$\begin{aligned} \tau_j(k_i) = k_i &\Rightarrow \sigma_{iji}(1) = 1 && \text{possibile} \\ \tau_j(k_i) = 1 &\Rightarrow \sigma_{iji}(1) = k_i && \text{assurdo} \\ \tau_j(k_i) \neq 1, k_i &\Rightarrow \sigma_{iji}(1) = \tau_i(\tau_j(k_i)) \neq 1 && \text{assurdo} \end{aligned}$$

Abbiamo quindi scoperto $\tau_j(k_i) = k_i \forall i, j$.

Ora invece osserviamo $f(\gamma_i\gamma_j) = (1, i + 1, j + 1)$.

Sia $\sigma_{ij} = \sigma_i\sigma_j$. Evidentemente allora $\sigma_{ij} = (1, k'_i, k'_j)\tau_{ij}$ con τ_{ij} permutazione che lascia fissi 1, k'_i, k'_j .

Ma allora $(1, k'_i, k'_j)\tau_{ij} = (1, k_i)\tau_i(1, k_j)\tau_j \Rightarrow k'_i = k_i$ e $k_i \neq k_j$.

A questo punto possiamo rinumerare la fibra $k_i = i + 1$ ed ottenere che almeno per quello che riguarda questi cammini il rivestimento agisce sulla fibra come f . Tuttavia i cammini γ_i non necessariamente generano $\pi_1(\Gamma^c)$, ma esiste un numero finito di lacci geometrici che lo genera. Da essi (tramite eventualmente operazioni di coniugio) possiamo estrarre il sistema di lacci geometrici appena studiato e poi ripetere il ragionamento inserendo uno alla volta i nuovi lacci (al più coniugati) al posto di un opportuno laccio precedentemente studiato in modo che il nuovo sistema di lacci verifichi ancora le ipotesi necessarie. È evidente che non sarà più necessario rinumerare la fibra del punto base.

Q.E.D.

I due lemmi ci dicono che, noto $\pi_1(\Gamma^c)$, studiando soltanto $\text{Hom}(\pi_1(\Gamma^c), \mathcal{S}_n)$ otteniamo tutti i possibili rivestimenti di Γ^c che facciano agire i lacci geometrici come trasposizioni sulla fibra del punto base.

Il problema è ora vedere se ed in quanti modi è possibile completare il suddetto rivestimento ad un τ -rivestimento di Ω ramificato su Γ .

3.3 Completamento del rivestimento alla parte liscia di Γ

Per prima cosa cerchiamo di vedere se è possibile completare il rivestimento sulla parte liscia di Γ . Per fare ciò dobbiamo dimostrare il seguente

Teorema 3.3.1 *X varietà connessa di dimensione n , Δ sottovarietà connessa di codimensione (reale) 2. $\varphi : N \rightarrow X \setminus \Delta$ rivestimento finito $\Rightarrow \exists!$ M varietà \mathbb{C}^∞ e $\Phi : M \rightarrow X$, \mathbb{C}^∞ , propria, e a fibra finita, tali che $M \setminus \Phi^{-1}(\Delta)$ è denso in M ed isomorfo ad N , e $\Phi|_N \equiv \varphi$*

Dimostrazione:

Dimostriamo prima l'esistenza costruendo esplicitamente M e Φ .

Sia T un intorno tubolare di Δ in X .

Per paracompattatezza $\exists(\Delta_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \Delta, (T_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset T$ tali che (Δ_i) è un rivestimento localmente finito di Δ , (T_i) un rivestimento localmente finito di T , $\forall i \Delta_i \cong D^{n-2}$, e se vediamo T come fibrato su Δ a fibra D^2 , T_i è esattamente la restrizione di suddetto fibrato a Δ_i . Ovviamente, essendo D^{n-2} contrattile, $\forall i T_i \cong D^2 \times D^{n-2}$.

Sia ora $T'_i = T_i \setminus \Delta_i$ e $\tilde{T}'_i = \varphi^{-1}(T'_i)$.

Ovviamente $\forall i \tilde{T}'_i$ ha un numero finito di componenti connesse T_i^l e $\forall i, l, \varphi|_{T_i^l}$ è un rivestimento finito di T'_i . Naturalmente, se $D^* = D^2 \setminus \{0\}$, $T_i^l \cong D^{n-2} \times D^*$ (che studierò con coordinate (\vec{x}, z) con \vec{x} reale e z complesso, per comodità), i cui rivestimenti sono classificati. La classificazione ci dice che $T_i^l \cong D^{n-2} \times D^*$ (con coordinate (\vec{x}', z')) e $\varphi|_{T_i^l} : T_i^l \rightarrow T'_i$ è tale che $\varphi|_{T_i^l}(\vec{x}, z) = (\vec{x}, z^k)$.

Sia ora (U_j, T_i^l) atlante per N . Definiamo $\hat{T}_i^l \cong D^{n-2} \times D^2$ (ancora con coordinate (\vec{x}, z^k)) La varietà M la costruiamo con l'atlante $(U_j, T_i^l, \hat{T}_i^l)$ dove

dobbiamo definire intersezione e mappa di cambio di coordinate tra una qualunque coppia di carte. Tra U_i e U_j , T_i^l e T_j^k , U_j e T_i^l sono esattamente le stesse che avevamo per N .

Tra T_i^l e \hat{T}_i^l le relazioni sono quelle naturali (c'è un modo canonico di vedere i primi come sottoinsiemi dei secondi) e da queste per composizione ricaviamo tutte quelle tra i \hat{T}_i^l e gli U_j e tra \hat{T}_i^l e T_j^k . Restano da trovare quelle tra \hat{T}_i^l e \hat{T}_j^k che si ricavano da quelle tra T_i^l e T_j^k per densità.

Φ è allora naturalmente definita su un denso (su N è $\equiv \varphi$).

Sia P un punto su cui non è ancora definita; ovviamente per qualche coppia i, l $P \in \hat{T}_i^l \setminus T_i^l$. Sia \hat{D}_p "fibra" di p per il fibrato \hat{T}_i^l e $D_p = \hat{D}_p \cap T_i^l$. È ben definito $\varphi(D_p) = \Phi(D_p)$ che per costruzione è "fibra" di un certo punto $p' \in \Delta$ per il fibrato T_i^l . Definisco $\Phi(p) = p'$. Φ è ovviamente C^∞ su tutto $M \setminus \Phi^{-1}(\Delta)$, ma per costruzione su $\Phi^{-1}(\Delta)$ è $(\vec{x}, z) \mapsto (\vec{x}, z^k)$ che è anch'essa C^∞ . È inoltre evidente per costruzione che Φ è propria ed a fibra finita.

Ora dimostriamo l'unicità.

Sia $(\tilde{M}, \tilde{\Phi})$ una coppia che verifica le condizioni espresse dall'enunciato. Cerco di costruire una $\sigma : \tilde{M} \rightarrow M$ che faccia commutare il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{M} & \xrightarrow{\sigma} & M \\ & \searrow \tilde{\Phi} & \swarrow \Phi \\ & & X \end{array}$$

σ è definita nel modo piú naturale su $\tilde{M} \setminus \tilde{\Phi}^{-1}(\Delta) \cong N$. Resta da definire $\sigma(\tilde{p}), \tilde{p} \in \tilde{\Phi}^{-1}(\Delta)$. Sia $p' = \tilde{\Phi}(\tilde{p})$. È evidente che per far commutare il diagramma dovrò scegliere l'immagine $p = \sigma(\tilde{p})$ in modo che $p \in \Phi^{-1}(p')$.

Procediamo nel seguente modo: sia i tale che $p' \in T_i$. Considero T_i^l ed i vari T_i^l (tanto in M quanto in \tilde{M}). Ci sarà un solo l tale che $\tilde{p} \in \overline{T_i^l}$; scegliamo p come l'unico elemento di $\Phi^{-1}(p')$ nell'accumulazione di T_i^l visto stavolta come sottoinsieme di M e non di \tilde{M} ; allora definiamo $\sigma(\tilde{p}) = p$.

A questo punto abbiamo trovato una σ che fa commutare il diagramma. Cerchiamo ora di trovare alcune proprietà di questa σ che ci saranno utili nella dimostrazione del Teorema.

Lemma 3.3.1 σ è un applicazione continua.

Dimostrazione:

Sia U aperto di M . Vogliamo dimostrare che $\sigma^{-1}(U)$ aperto. Ovviamente basta dimostrarlo per una base di aperti, ed è banale se U non interseca $\Phi^{-1}(\Delta)$. Posso quindi supporre U intorno di un punto $p \in \Phi^{-1}(\Delta)$, $U \subset \hat{T}_i^l$ per una certa coppia i, l . Φ aperta, $\tilde{\Phi}$ continua $\Rightarrow \tilde{\Phi}^{-1}(\Phi(U))$ è aperto ed ha un numero finito di componenti connesse \Rightarrow ogni componente connessa è aperta. Ma $\tilde{\Phi}^{-1}(\Phi(U))$ ha lo stesso numero di componenti connesse di $\Phi^{-1}(\Phi(U))$ e per costruzione σ induce una bigezione tra le componenti connesse $\Rightarrow \sigma^{-1}(U)$ è proprio la componente connessa di $\tilde{\Phi}^{-1}(\Phi(U))$ che contiene $\sigma^{-1}(U \setminus \Phi^{-1}(\Delta))$, e quindi è aperto.

Q.E.D.

Lemma 3.3.2 σ è un applicazione propria.

Dimostrazione:

$K \subset M$ compatto $\Rightarrow K$ chiuso $\Rightarrow \sigma^{-1}(K)$ è chiuso. $\Phi(K)$ è compatto (Φ è continua) $\Rightarrow \tilde{\Phi}^{-1}(\Phi(K))$ è compatto ($\tilde{\Phi}$ è propria) $\Rightarrow \sigma^{-1}(K)$ è un chiuso contenuto in un compatto \Rightarrow è un compatto.

Q.E.D.

Lemma 3.3.3 σ è un applicazione iniettiva.

Dimostrazione:

Sia $P \in M$, $\{P_1, \dots, P_r\} = \sigma^{-1}(P) \subset \tilde{M}$.

Ovviamente r è finito perché per ipotesi $\tilde{\Phi}^{-1}$ è a fibra finita.

Devo dimostrare $r = 1$.

Ovviamente basta dimostrarlo per $P \in \Phi^{-1}(\Delta)$. Siano (\tilde{M} è Hausdorff) U_1, \dots, U_r intorni aperti disgiunti di P_1, \dots, P_r tutti contenuti in \hat{T}_i^l (intendo gli U_i come gli intorni meno $\Phi^{-1}(\Delta)$). Sia ora U intorno di P tale che $\sigma^{-1}(U) \subset U_1 \cup \dots \cup U_r$ ed $U \cong D^{n-2} \times (D^2 \setminus \{0\})$. Siano V_i, \dots, V_r definiti come $V_i = U_i \cap \sigma^{-1}(U)$; sono aperti, la loro unione è tutto $\sigma^{-1}(U)$; ma $\sigma^{-1}(U)$ è connesso $\Rightarrow r = 1$.

Q.E.D.

Lemma 3.3.4 *Un applicazione continua iniettiva propria tra varietà è un omeomorfismo con l'immagine, e l'immagine è chiusa.*

Dimostrazione:

Nella dimostrazione useremo la terminologia adottata finora, ma ovviamente la dimostrazione vale per una qualsiasi mappa continua iniettiva propria e non solo per la nostra σ .

Sia $P \in M$, $U(P)$ intorno compatto di P .

Sia $V = \sigma^{-1}(U(P))$. V è compatto perchè σ è propria.

Allora $\sigma|_V$ è un'applicazione continua iniettiva tra un compatto ed un Hausdorff \Rightarrow è un omeomorfismo con l'immagine.

L'immagine è chiusa perché σ è propria. Infatti se non fosse chiusa scelto $x_0 \in M \setminus \text{Im}(\sigma)$ e $\{x_n\} \subset \text{Im}(\sigma)$ successione, allora risulterebbe $\{x_n\} \cup x_0$ compatto ed altrettanto la sua controimmagine.

Se $y_n = \sigma^{-1}(x_n)$ avrei che $\{y_n\}$ sarebbe una successione contenuta in un compatto che non contiene sottosuccessioni convergenti, il che è assurdo.

Q.E.D.

Conclusione della dimostrazione del Teorema:

Questo ci permette di concludere che M ed \tilde{M} sono sempre omeomorfe e diffeomorfe su un denso.

Nel caso olomorfo questo ci dà unicità perché un biolomorfismo su un denso che si estende ad un omeomorfismo globale, si estende sempre ed in maniera unica ad un biolomorfismo globale.

Q.E.D.

Il Teorema 3.2.1 ed il Teorema 3.3.1 danno il seguente

Teorema 3.3.2 *Data una curva $\Gamma \subset \Omega$ con singolarità nell'origine, e dato un omomorfismo $f : G = \pi_1(\Gamma^c) \rightarrow \mathcal{S}_n$ che manda lacci geometrici in trasposizioni, esiste un unico rivestimento (M, φ) di $\Omega \setminus \{0\}$ ramificato in Γ che abbia questo omeomorfismo come azione del π_1 sulla fibra del punto base supposto fuori di Γ .*

3.4 Estensione alla singolarità

In questo paragrafo ci occupiamo di estendere il rivestimento fin qui costruito anche all'origine, in modo da ottenere una superficie normale che si proietta su Ω come spiegato nel capitolo precedente.

Si tratta di dimostrare il seguente

Teorema 3.4.1 *La mappa φ del teorema 3.3.2 si può estendere in maniera unica ad una mappa $\tilde{\pi} : \tilde{M} \rightarrow \Omega$, con $M \subset \tilde{M}$, \tilde{M} superficie normale, $\tilde{M} \setminus M$ finito, $\tilde{\pi}^{-1}(\Omega \setminus \{0\}) = M$, e $\tilde{\pi}|_M \equiv \pi$.*

Dimostrazione:

Posso supporre Ω polidisco.

Per il teorema di preparazione di Weiestrass, posso scegliere coordinate (z, w) , su Ω in maniera tale che Γ sia descritta dall'equazione

$$w^p + a_1(z)w^{p-1} + \dots + a_p(z) = 0.$$

Procediamo tramite scoppiamenti. Per [L] possiamo ottenere una superficie complessa liscia $\tilde{\Omega}$, ed una curva $L \subset \tilde{\Omega}$ tali che $L = \bigcup L_i$, L_i curve compatte lisce irriducibili, tali che due di esse si intersecano al più trasversalmente in un punto, e mai tre di esse passano per lo stesso punto. Inoltre $\tilde{\Omega} \setminus L \cong \Omega \setminus \{0\}$. Chiameremo π la mappa che questo isomorfismo genera, $\pi : M \rightarrow \tilde{\Omega} \setminus L$.

Siano p_1, \dots, p_s i punti singolari di L .

Per il Teorema 3.3.1 posso estendere questa mappa in maniera unica ad una mappa olomorfa $\tilde{\pi}' : \tilde{M}' \rightarrow \tilde{\Omega} \setminus \{p_1, \dots, p_s\}$ con le stesse caratteristiche.

Per [L], tramite il procedimento descritto nel capitolo precedente, posso chiudere il rivestimento ad una mappa $\tilde{\pi}'' : \tilde{M}'' \rightarrow \tilde{\Omega}$, da cui per composizione posso ottenere la mappa $\tilde{\pi}''' : \tilde{M}''' \rightarrow \Omega$, che rispetta tutte le ipotesi del teorema eccetto per la finitezza di $\tilde{\pi}'''^{-1}(0)$. Inoltre \tilde{M}''' non è semplicemente una superficie normale ma una varietà complessa liscia di dimensione 2. Considero allora $\hat{L} = \tilde{\pi}'''^{-1}(0)$. $\hat{L} = \bigcup_1^n \hat{L}_i$, \hat{L}_i lisce ad intersezione trasversale. Considero ora la forma di intersezione delle \hat{L}_i .

Occorre ora dimostrare due lemmi

Lemma 3.4.1 $\exists a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}^*$, tali che, detto $\hat{L}' = a_1\hat{L}_1 + a_2\hat{L}_2 + \dots + a_n\hat{L}_n$, $\langle \hat{L}', x_1\hat{L}_1 + x_2\hat{L}_2 + \dots + x_n\hat{L}_n \rangle \leq 0 \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione del lemma:

Sia infatti f funzione meromorfa su Ω che si annulli nell'origine, e sia \tilde{f} il suo pull-back su \tilde{M}''' . Ovviamente \tilde{f} si annulla su tutte le \hat{L}_i , con varie molteplicità. Sia a_i l'ordine di annullamento della f su L_i . Per il teorema 2.2.1, poichè $x_1\hat{L}_1 + \dots + x_n\hat{L}_n$ è compatto, $\langle \tilde{f}, x_1\hat{L}_1 + \dots + x_n\hat{L}_n \rangle = 0$.

Ovviamente $(\tilde{f}) = a_1\hat{L}_1 + \dots + a_n\hat{L}_n + K$ con K non avente nessuna delle \hat{L}_i come componenti, per cui $\langle K, x_1\hat{L}_1 + \dots + x_n\hat{L}_n \rangle \geq 0$, da cui la tesi.

Q.E.D.

Lemma 3.4.2 *La forma di intersezione delle \hat{L}_i è definita negativa.*

Dimostrazione del lemma:

Sia S la matrice associata alla forma di intersezione delle \hat{L}_i .

Vogliamo dimostrare la negativa definitezza di questa matrice.

È equivalente dimostrare la negativa definitezza della matrice $S' = ASA$, dove A è la matrice diagonale i cui coefficienti sono le a_i .

È ovvio che $S'_{ij} \geq 0 \forall i \neq j$.

Inoltre $\sum_j S'_{ij} \leq 0$ per il lemma 3.4.1.

Queste due condizioni implicano che la matrice è semidefinita negativa.

Per quanto riguarda la completa definitezza osserviamo che per qualche j , $\sum_j S'_{ij} < 0$ dato che il K introdotto nella dimostrazione del lemma 3.4.1 è la trasformata stretta del luogo di zeri di f , e quindi non è vuoto ed interseca qualche \hat{L}_j .

Inoltre \hat{L} è connesso, e quindi così è il grafo associato alla forma di intersezione.

Allora supponiamo per assurdo $\exists \alpha_i$ reali tali che $0 = \sum_{ij} \alpha_i \alpha_j S'_{ij} = \sum_i \alpha_i^2 S'_{ii} + 2 \sum_{i < j} \alpha_i \alpha_j S'_{ij} = \sum_j (\sum_i S'_{ij}) \alpha_j^2 - \sum_{i < j} S'_{ij} (\alpha_i - \alpha_j)^2$.

Da questo, la prima delle ultime due osservazioni implica $\exists j$ tale che $\alpha_j = 0$, da cui la seconda dà $\forall i \alpha_i = 0$.

Q.E.D.

Definizione 3.4.1 *Sia X varietà complessa bidimensionale, $A \subset X$ unione di curve compatte lisce tali che due di esse si intersecano al più in un punto, e sempre con intersezione trasversale, e mai tre di esse passano per lo stesso punto.*

Allora A è detto eccezionale se esiste uno spazio analitico Y ed una mappa olomorfa propria $\Phi : X \rightarrow Y$ tale che $\Phi(A)$ è discreto, $\Phi : X \setminus A \rightarrow Y \setminus \Phi(A)$ è un biolomorfismo, e per ogni aperto $U \subset Y$, detto $V = \Phi^{-1}(U)$, $\Phi^* : \mathcal{O}_U \rightarrow \mathcal{O}_V$ è un isomorfismo.

La dimostrazione del seguente Teorema si può trovare su [L], pg. 60.

Teorema 3.4.2 *Sia A un sottospazio analitico compatto monodimensionale di una varietà bidimensionale X . Siano operate trasformazioni quadratiche fino ad ottenere A composto da curve lisce ad intersezione trasversale come sopra. Allora la matrice di intersezione della trasformata completa di A è definita negativa $\Leftrightarrow A$ è eccezionale.*

Conclusione della Dimostrazione del Teorema 3.4.1:

Dato che per il Lemma 3.4.2 e il Teorema 3.4.2 \hat{L} è eccezionale, per la Definizione 3.4.1 abbiamo uno spazio analitico Y su cui la mappa si fattorizza, e quindi verrà fattorizzata anche sulla normalizzazione di Y , che chiameremo Ω . Chiameremo $\tilde{\pi} : M \rightarrow \Omega$ la mappa così ottenuta.

$\tilde{\pi}$ è banalmente a fibra finita e quindi è una semplice verifica osservare che $\tilde{\pi}$ è proprio la mappa cercata.

Per quanto riguarda l'unicità basta osservare che se ne avessi due differenti, potrei costruire un omeomorfismo tra le due che sia anche un biolomorfismo su un denso, e quindi un biolomorfismo globale.

Q.E.D.

3.5 Sistemi di curve eccezionali del primo tipo

A questo punto occorre fare alcune considerazioni sui risultati fin qui conseguiti.

Sia X superficie analitica normale.

Abbiamo visto che esistono sempre τ -rivestimenti di X su un intorno di \mathbb{C}^2 .

Osservando il gruppo fondamentale del complementare della curva di ramificazione, e le sue possibili azioni sulla fibra del complementare possiamo ricostruire la superficie.

La prima osservazione da fare è che due curve differenti possono essere luogo di ramificazione di un τ -rivestimento associato alla stessa superficie mediante proiezioni differenti; ad esempio la superficie in \mathbb{C}^3 descritta dall'equazione $z = 0$ si proietta sul piano $\langle x, y \rangle$ con il vuoto come curva di ramificazione, mentre la superficie analiticamente equivalente $z^3 + xz + y = 0$ si proietta sullo stesso piano ramificandosi su una cuspidale, e quindi in questo caso abbiamo due costruzioni differenti che costruiscono la stessa superficie.

Un importante risultato dovuto a Mumford è il seguente ([M]):

Teorema 3.5.1 *Sia F superficie liscia, E_1, \dots, E_n collezione di curve lisce di F tali che $E_i \cap E_j$ è vuoto o consiste di un solo punto ad intersezione trasversale, e $E_i \cap E_j \cap E_k = \emptyset$ per ogni terna. Sia I intorno tubolare di $E = \bigcup E_i$. Allora le condizioni*

$$a) \pi_1(I \setminus E) = e$$

b) *La matrice di intersezione degli E_i è definita negativa.*

sono equivalenti al fatto che $E \subset F$ sia la trasformata completa di un punto liscio di una superficie analitica.

Un altro risultato interessante che ci permette di individuare alcuni casi di differenti costruzioni della stessa superficie è il seguente

Teorema 3.5.2 *La struttura del teorema 3.5.1 verifica le condizioni indicate dallo stesso $\Rightarrow \exists i$ tale che $E_i \cong \mathbb{C}P^1$, $\langle E_i, E_i \rangle = -1$ e E_i interseca al più altri due E_j .*

In sintesi:

se noi prendiamo una curva per l'origine in \mathbb{C}^2 ed un omomorfismo surgettivo del gruppo fondamentale di questa curva in un qualche \mathcal{S}_n abbiamo univocamente determinato una superficie analitica che si proietta su \mathbb{C}^2 con questa curva di ramificazione mediante un τ -rivestimento ad n fogli.

Inoltre, se questa costruzione dà origine ad una superficie liscia, allora il sistema di curve costruito nella dimostrazione del teorema 3.4.1 si può contrarre fino a farlo scomparire iterando il procedimento accennato nel Capitolo 2, Paragrafo 2, ossia contraendo ogni curva della trasformata completa dell'origine che sia una retta proiettiva con autointersezione -1 che interseca al più altre due curve della stessa trasformata, ottenendo così un sistema che differisce dal precedente nel senso che manca la curva contratta, l'autointersezione

delle curve che la intersecavano aumenta di 1, e se queste sono due adesso si intersecano.

Per usare la terminologia del Capitolo 2, Paragrafo 2, possiamo dire che la superficie è liscia se e soltanto se la quaterna associata (I, J, g, c) è equivalente per la relazione di equivalenza descritta nello stesso paragrafo, alla quaterna vuota.

Definizione 3.5.1 *Chiameremo un tale sistema di curve eccezionale del primo tipo.*

Osservazione 3.5.1 *Condizione necessaria perchè un sistema di curve sia eccezionale del primo tipo è che il grafo associato alla sua matrice di intersezione sia un albero e tutti i suoi vertici siano rette proiettive.*

Capitolo 4

Alcune applicazioni

Nei capitoli precedenti abbiamo visto che una qualunque superficie analitica si può proiettare su \mathbb{C}^2 per mezzo di un rivestimento ramificato con certe proprietà, che abbiamo chiamato τ -rivestimento.

Abbiamo anche visto che nota solo la curva di ramificazione di questa proiezione, e l'azione del gruppo fondamentale del complementare della curva sulla fibra, è possibile ricostruire la superficie.

In questa sezione noi ci interessiamo di studiare alcune curve, cercando di ricostruire, dove sia possibile, quante e quali superfici possono venire proiettate su \mathbb{C}^2 con queste curve come luogo di ramificazione. Per fare ciò dobbiamo essere in grado di calcolare il gruppo fondamentale del complementare di una curva in un intorno dell'origine in \mathbb{C}^2 .

4.1 Studio del gruppo fondamentale del complementare di una curva in \mathbb{C}^2

Sia Δ curva in \mathbb{C}^2 singolare nell'origine, (z, w) coordinate complesse in \mathbb{C}^2 .

Sia U intorno policilindrico dell'origine in \mathbb{C}^2 , $V = U \cap \{w = 0\}$; sia $\varphi : U \rightarrow V$ la proiezione naturale.

Fissiamo w_0 tale che $|w_0| \gg \varepsilon$. Se $z \in V$, chiameremo L_z la retta $\varphi^{-1}(z)$, e $p_z = (w_0, z) \in L_z$.

Sia Γ luogo di ramificazione della proiezione $\varphi|_{U \cap \Delta} : U \cap \Delta \rightarrow V$, $\tilde{\Gamma} = \varphi^{-1}(\Gamma)$.

Preso $z_0 \in V \setminus \Gamma$, abbiamo il seguente diagramma, dove abbiamo preso come punto base dei gruppi fondamentali sempre il punto z_0 .

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \pi_1(L_{z_0} \setminus \Delta) & \xrightarrow{j} & \pi_1(U \setminus (\Delta \cup \tilde{\Gamma})) & \begin{array}{c} \xleftarrow{\beta} \\ \xrightarrow{\gamma} \end{array} & \pi_1(V \setminus \Gamma) \longrightarrow 0 \\
& & & & \downarrow \alpha & & \\
& & & & \pi_1(U \setminus \Delta) & &
\end{array}$$

Le applicazioni j ed α sono le applicazioni indotte a livello di omotopia dalle immersioni naturali, β dalla $\varphi|_{U \setminus (\Delta \cup \tilde{\Gamma})}$, e γ dalla $z \mapsto (w_0, z)$.

Osserviamo che la $\varphi|_{U \setminus (\Delta \cup \tilde{\Gamma})} : U \setminus (\Delta \cup \tilde{\Gamma}) \rightarrow V \setminus \Gamma$ è un fibrato a fibra $L_{z_0} \setminus \Delta$, e l'applicazione $z \mapsto (w_0, z)$ induce una sezione di questo fibrato. Quindi per la successione di omotopia dei fibrati noi abbiamo che la linea orizzontale del diagramma in figura 4.1 è esatta e che $\beta \circ \gamma$ è l'identità di $\pi_1(V \setminus \Gamma)$; è ovvio inoltre che l'applicazione α è surgettiva, e che $\alpha \circ \gamma$ è l'omomorfismo nullo.

Allora possiamo considerare la successione

$$0 \rightarrow \pi_1(V \setminus \Gamma) \xrightarrow{\gamma} \pi_1(U \setminus (\Delta \cup \tilde{\Gamma})) \xrightarrow{\alpha} \pi_1(U \setminus \Delta) \rightarrow 0.$$

Questa successione non è necessariamente esatta in $\pi_1(U \setminus (\Delta \cup \tilde{\Gamma}))$, perchè anche se abbiamo visto che $\alpha \circ \gamma$ è l'omomorfismo nullo, e quindi $\text{Im } \gamma \subset \ker \alpha$, non è garantito $\text{Im } \gamma = \ker \alpha$.

Quello che però otteniamo è la seguente

Proposizione 4.1.1 *ker α è generato dai coniugati dell'immagine di γ .*

Dimostrazione:

Sia $v \in \text{Im } \gamma$, e $b \in \pi_1(U \setminus (\Delta \cup \tilde{\Gamma}))$. Ovviamente $b^{-1}vb \in \ker \alpha$.

Sia invece $b \in \ker \alpha$. Per la successione esatta della coppia $b = \partial c$ con $c \in \pi_2(U \setminus \Delta, U \setminus (\Delta \cup \tilde{\Gamma}))$. c può essere rappresentato con una mappa $\hat{c} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U \setminus \Delta$ trasversale a $\tilde{\Gamma}$. Chiameremo P_1, \dots, P_s i punti che costituiscono l'insieme finito $\hat{c}^{-1}(\tilde{\Gamma})$.

In $\pi_1(U \setminus (\Delta \cup \tilde{\Gamma}))$, b è equivalente ad un prodotto di cammini w_1, \dots, w_s , dove i w_i sono cammini che si ottengono componendo un arco continuo τ che collega p_{z_0} con un punto vicino ad un punto di $\tilde{\Gamma}$, con un piccolo loop intorno a $\tilde{\Gamma}$, e poi ancora con τ^{-1} .

Possiamo costruire un cilindro in $U \setminus (\Delta \cup \tilde{\Gamma})$, il cui bordo è composto da due circonferenze, di cui una è il loop costruito per la w_i , e l'altro in $V \setminus \Gamma$.

Sia $\tilde{\tau}$ un arco in $V \setminus \Gamma$ che collega p_{z_0} a quest'ultimo loop, e v_i il cammino chiuso risultante componendo $\tilde{\tau}$ con questo loop e poi ancora con $\tilde{\tau}^{-1}$. Se α_i è il cammino chiuso ottenuto attaccando τ ad un cammino intorno al cilindro che vada da una circonferenza all'altra, e poi a $\tilde{\tau}^{-1}$. otteniamo $w_i = \alpha_i v_i \alpha_i^{-1}$. Quindi b è il prodotto di coniugati di $\text{Im } \gamma$.

Q.E.D.

Questo ci dà il seguente

Corollario 4.1.1 *ker $\alpha \cap \text{ker } \beta$ è il minimo sottogruppo normale N di $\text{ker } \beta$ che contiene gli elementi della forma $bvb^{-1}v^{-1}$, $b \in \text{ker } \beta$, $v \in \text{Im } \gamma$.*

Dimostrazione:

Sia $b \in \pi_1(U \setminus (\Delta \cup \tilde{\Gamma}))$, $v \in \text{Im } \gamma$.

allora $bvb^{-1} = (b(\gamma\beta(b^{-1})))((\gamma\beta(b))v(\gamma\beta(b^{-1})))((\gamma\beta(b))b^{-1})$, che possiamo scrivere $\bar{v}\bar{v}^{-1}$, con $\bar{v} \in \text{Im } \gamma$, $\bar{v} \in \text{ker } \beta$.

Se $b \in \text{ker } \alpha$, per la Proposizione 4.1.1 sarà $\bar{v} = b_1 v_1 b_1^{-1} \cdots b_s v_s b_s^{-1}$, con $b_i \in \text{ker } \beta$, $v_i \in \text{Im } \gamma$.

Se $b \in \text{ker } \beta$, allora $\beta(v_1 \cdots v_s) = 1$ e quindi $v_1 \cdots v_s = 1$ (β è iniettiva su $\text{Im } \gamma$). Sia allora $n_i = b_i v_i b_i^{-1} v_i^{-1} \in N$. Allora $b = n_1 v_1 \cdots n_s v_s = v_s^{-1} \cdots v_1^{-1} n_1 v_1 \cdots n_s v_s$.

Ma da $v \in \text{Im } \gamma$, $n \in N \Rightarrow v^{-1} n v \in N$, si deduce $b \in N$.

Q.E.D.

È il caso di osservare a questo punto che se prendiamo un cammino chiuso in $V \setminus \Gamma$, e seguiamo su di esso le m radici dell'equazione che definisce Δ , otteniamo una treccia a m fili, che agisce sul gruppo libero in m parole nella maniera naturale. Questa è esattamente l'azione appena studiata, ed il gruppo fondamentale del complementare di Δ in \mathbb{C}^2 è esattamente il gruppo libero in m lettere quozientato con questa azione.

Ora che siamo in grado di calcolare il gruppo fondamentale del complementare di una curva in \mathbb{C}^2 , possiamo studiare i τ -rivestimenti di \mathbb{C}^2 ramificati su questa curva.

Prima però di analizzare alcune classi di curve facciamo alcune osservazioni di carattere generale.

Sia ancora Δ curva in \mathbb{C}^2 descritta dall'equazione (ridotta) $f(x, y) = 0$.

Osservazione 4.1.1 *Esiste sempre uno ed un solo τ -rivestimento a due fogli ramificato in Δ .*

Dimostrazione:

Basta osservare infatti che in questo caso la superficie irriducibile in \mathbb{C}^3 descritta dall'equazione $z^2 = f(x, y)$ con la sua proiezione sulle prime due coordinate, è il τ -rivestimento cercato.

L'unicità deriva dal fatto che esiste un solo omomorfismo $\varphi : \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \Delta) \rightarrow \mathcal{S}_2$ che manda i lacci geometrici in trasposizioni, perchè in \mathcal{S}_2 c'è una sola trasposizione, $(1, 2)$.

Q.E.D.

Osservazione 4.1.2 *Se $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \Delta)$ ha n generatori formati da lacci geometrici, e (X, φ) è un τ -rivestimento ad r fogli, allora $r \leq n + 1$.*

Dimostrazione:

Per dimostrare questo è sufficiente osservare che la minima cardinalità di un sistema di generatori di \mathcal{S}_r formato da trasposizioni, è $r - 1$.

Q.E.D.

Consideriamo ora la presentazione di Artin di \mathcal{S}_n . Sappiamo che \mathcal{S}_n può essere visto come il gruppo a $n - 1$ generatori, $\tau_1, \dots, \tau_{n-1}$, dove le τ_i corrispondono alle trasposizioni $(i, i + 1)$, con la presentazione data dalle relazioni:

$$\begin{aligned} \tau_i \tau_j &= \tau_j \tau_i & |i - j| &\geq 2 \\ \tau_i \tau_j \tau_i &= \tau_j \tau_i \tau_j & |i - j| &= 1 \\ \tau_i^2 &= e \end{aligned}$$

Supponiamo che esista un τ -rivestimento (X, φ) di grado $d \geq 4$ e con come curva di ramificazione una certa curva piana Γ .

Vogliamo vedere se è possibile ricostruire partendo da questo un τ -rivestimento di grado $d - 1$.

I lacci geometrici generanti il gruppo fondamentale, che avremo chiamato $\gamma'_1, \dots, \gamma'_n$ agiranno tutti sulla fibra del punto base come trasposizioni. A questo punto però possiamo cambiare la scelta dei lacci geometrici in modo da avere una nuova famiglia $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ di lacci geometrici generanti il gruppo fondamentale, tali che la loro azione sulla fibra sia del tipo $(k, k + 1)$: è infatti

sufficiente scegliere come γ_i un opportuno coniugato di γ'_i (il coniugato di un laccio geometrico è ancora un laccio geometrico, è una semplice conseguenza della definizione). Fatto ciò ci domandiamo, ammettendo l'esistenza di un tale τ -rivestimento, quale forma possono avere le nuove relazioni di presentazione del gruppo fondamentale del complementare. Devono essere relazioni che valgono per le σ_i , dove abbiamo chiamato σ_i l'azione di γ_i sulla fibra del punto base. Per quello che è stato detto finora σ_i è del tipo $(k, k + 1)$.

Per indurre dal nostro τ -rivestimento un τ -rivestimento di grado $d - 1$, ci serve un omomorfismo da \mathcal{S}_d su \mathcal{S}_{d-1} che mandi le τ_i in trasposizioni, e quindi trasposizioni in trasposizioni.

Nel caso $d = 4$ possiamo costruire esplicitamente un tale omomorfismo; si tratta dell'omomorfismo che agisce nel seguente modo:

$$(1, 2) \mapsto (1, 2)$$

$$(2, 3) \mapsto (2, 3)$$

$$(3, 4) \mapsto (1, 2).$$

E' una facile verifica, con l'aiuto della presentazione di Artin di \mathcal{S}_n , osservare che c'è uno ed un solo omomorfismo di \mathcal{S}_4 su \mathcal{S}_3 che si comporta in tal modo sulle τ_i .

Quindi abbiamo dimostrato la seguente

Proposizione 4.1.2 *Sia (X, φ) , un τ -rivestimento di grado 4 ramificato su una curva Γ . Allora esiste sempre un τ -rivestimento di grado 3 ramificato sulla stessa curva.*

Se avessimo un tale omomorfismo per ogni n avremmo la garanzia che se esiste un τ -rivestimento ramificato su una certa curva, esistono τ -rivestimenti di tutti i possibili gradi compresi tra 2 e quello trovato.

Purtroppo un tale omomorfismo non esiste per nessun n maggiore di 4.

Cerchiamo infatti di costruire un tale omomorfismo, vedendo come potrebbe agire sulle τ_i . Sia τ'_i l'immagine di τ_i per questo presunto omomorfismo.

$\tau_1 = (1, 2)$ è una trasposizione, e quindi la sua immagine sarà una trasposizione. Posso allora supporre $\tau'_1 = (1, 2)$.

$\tau_2 = (2, 3)$. La sua immagine τ'_2 dovrà essere tale che $\tau'_1 \tau'_2 \tau'_1 \tau'_2 \tau'_1 \tau'_2 = e$, ed essere una trasposizione. Ciò significa che almeno uno dei due elementi

coinvolti nella trasposizione τ'_2 deve essere coinvolto nella prima, per cui, o $\tau'_2 = (1, 2)$, oppure possiamo supporre $\tau'_2 = (2, 3)$.

Nel primo caso, però, dovendo essere $\tau'_1\tau'_3\tau'_1\tau'_3 = e$, e, contemporaneamente $\tau'_2\tau'_3\tau'_2\tau'_3\tau'_2\tau'_3 = e$, avremmo ovviamente che anche $\tau'_3 = (1, 2)$, ed è inutile proseguire, perchè comunque l'omomorfismo non può più essere surgettivo (se proseguissimo, per le medesime ragioni risulterebbe $\tau'_i = (1, 2) \forall i$).

Possiamo allora concludere $\tau'_2 = (2, 3)$ Ancora dovrà essere $\tau'_1\tau'_3\tau'_1\tau'_3 = e$, e, contemporaneamente $\tau'_2\tau'_3\tau'_2\tau'_3\tau'_2\tau'_3 = e$, che in questo caso ci dicono che, o $\tau'_3 = (1, 2)$, oppure possiamo supporre $\tau'_3 = (3, 4)$.

Abbiamo ricostruito l'omomorfismo usato poco fa per il caso $d = 4$.

Siamo però ora nel caso $d > 4$, e quindi dobbiamo cercare altre τ'_i . Supponiamo $\tau'_3 = (1, 2)$. τ'_i per $i > 4$ dovrà commutare sia con $\tau'_1 = (1, 2)$ che con $\tau'_2 = (2, 3)$, per cui dovrà essere una trasposizione che non sposta né 1 né 2 né 3. Questo non permette che l'omomorfismo costruito sia surgettivo.

Allora $\tau'_3 = (3, 4)$. Possiamo allora vedere per induzione, ripetendo il ragionamento fatto per $i = 3$, che dovrà essere sempre $\tau'_i = (i, i + 1)$, $\forall i \in \{1, \dots, d - 2\}$. Ma allora τ'_{d-1} , dovendo commutare con tutti i τ'_i , $i < d - 2$ non potrà spostare nessun elemento tra 1 e $d - 1$, e quindi non può essere una trasposizione.

4.2 τ -rivestimenti ramificati in $\Gamma = \{x^2 = y^n\}$

La tecnica espressa nel paragrafo precedente ci permette di calcolare facilmente $\pi_1(U \setminus \Gamma)$, dove U è un intorno sferico dell'origine. Definiamo

$$\begin{aligned} (xy)^{[n]} &= (xy)^{\frac{n}{2}} & n \text{ pari} \\ (xy)^{[n]} &= (xy)^{\frac{n-1}{2}}x & n \text{ dispari} \end{aligned}$$

Otteniamo

$$\pi_1(U \setminus \Gamma) = \frac{\mathbb{Z} * \mathbb{Z}}{\langle (ab)^{[n]} = (ba)^{[n]} \rangle}.$$

A questo punto studiamo tutti i possibili rivestimenti.

Osserviamo innanzitutto che, poiché il $\pi_1(U \setminus \Gamma)$ ha solo due generatori, il numero massimo di fogli del rivestimento è 3, dato che non esiste nessun omomorfismo surgettivo da $\pi_1(U \setminus \Gamma)$ in \mathcal{S}_n per $n > 3$.

Supponiamo ora che esista un rivestimento di grado 3. Allora esisterebbe un omomorfismo surgettivo $\varphi : \pi_1(U \setminus \Gamma) \rightarrow \mathcal{S}_3$ tale che $\varphi(a)$ e $\varphi(b)$ siano trasposizioni. Posso supporre $\varphi(a) = (1, 2)$ e $\varphi(b) = (2, 3)$.

Ma allora la presentazione del $\pi_1(U \setminus \Gamma)$ ci dice che dovrebbe essere $\varphi(a)\varphi(b)\cdots = \varphi(b)\varphi(a)\cdots$. Osserviamo che $\varphi(a)\varphi(b) = (1, 3, 2)$, mentre $\varphi(b)\varphi(a) = (1, 2, 3)$. Distinguiamo due casi:

i) n pari.

In tal caso la relazione diventa $(1, 3, 2)^{\frac{n}{2}} = (1, 2, 3)^{\frac{n}{2}}$, che è possibile se e soltanto se $\frac{n}{2} \equiv 0 \pmod{3}$, cioè $n \equiv 0 \pmod{3}$.

ii) n dispari.

In tal caso la relazione diventa $(1, 3, 2)^{\frac{n-1}{2}}(1, 2) = (1, 2, 3)^{\frac{n-1}{2}}(2, 3)$, che è verificata se e solo se $\frac{n-1}{2} \equiv 1 \pmod{3}$, cioè ancora $n \equiv 0 \pmod{3}$.

Allora risulta evidente che oltre all'unico rivestimento di grado 2 esiste un rivestimento di grado 3 solo nel caso $n \equiv 0 \pmod{3}$ ed è unico.

Possiamo inoltre verificare direttamente che in questo caso si tratta della superficie algebrica in \mathbb{C}^3 descritta dall'equazione

$$z^3 - 3zy^{\frac{n}{3}} + 2x = 0,$$

canonicamente proiettata sul piano $\langle x, y \rangle$. Questa superficie è liscia.

Abbiamo così ottenuto la seguente

Proposizione 4.2.1 *Sia $X \subset \mathbb{C}^n$ superficie normale che si proietti su un aperto di \mathbb{C}^2 con un τ -rivestimento ramificato sulla curva $x^2 = y^n$. Allora possono esserci due casi:*

i) Il rivestimento ha grado 2 e la superficie è analiticamente equivalente all'ipersuperficie in \mathbb{C}^3 descritta dall'equazione $z^2 = x^2 + y^n$.

ii) Il rivestimento ha grado 3, n è multiplo di 3, e la superficie è liscia.

4.3 τ -rivestimenti ramificati in $\Gamma = \{x^n = y^n\}$

Col metodo descritto nel primo paragrafo di questa sezione possiamo calcolare $\pi_1(U \setminus \Gamma)$.

Chiameremo $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, i lacci geometrici generanti il gruppo fondamentale costruiti come nel primo paragrafo, $\gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_n$, e chiameremo R_i la relazione $\gamma_i = \gamma \gamma_i \gamma^{-1}$

Otteniamo

$$\pi_1(U \setminus \Gamma) = \frac{\mathbb{Z}^{*n}}{\langle R_1, \dots, R_n \rangle}.$$

Osserviamo innanzitutto che, dato che il gruppo fondamentale ha n generatori, sicuramente il rivestimento non può avere più di $n + 1$ fogli.

Sia ora X superficie analitica normale e $\pi : X \rightarrow \mathbb{C}^2$ τ -rivestimento a d fogli ramificato in γ . Sia $\varphi : \pi_1(U \setminus \Gamma) \rightarrow \mathcal{S}_d$ l'omomorfismo surgettivo associato. Chiameremo $\sigma = \varphi(\gamma)$ e $\sigma_i = \varphi(\gamma_i)$. Allora per la presentazione del $\pi_1(U \setminus \Gamma)$ σ commuta con tutte le σ_i , e di conseguenza con tutto \mathcal{S}_d . Questo implica che $d = 2$ oppure $\sigma = e$. Nel caso $d = 2$, X è analiticamente equivalente alla superficie $z^2 = x^n + y^n$.

Ci interessiamo ora solo al caso $d > 2$, e quindi $\sigma = e$.

Proposizione 4.3.1 *Siano $\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_k}$ trasposizioni in \mathcal{S}_d che generano $\mathcal{S}_{k+1} \subset \mathcal{S}_d$. Allora $\bar{\sigma}_k = \sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_k}$ è un $(k + 1)$ -ciclo.*

Dimostrazione:

Procediamo per induzione su k .

Se $k = 1$ la tesi è banale.

Supponiamo la tesi vera per $k - 1$. Allora posso supporre, a meno di rinumerare gli elementi permutati da \mathcal{S}_d , $\bar{\sigma}_{k-1} = \sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_{k-1}} = (1, 2, \dots, k)$, e $\sigma_{i_k} = (1, k + 1)$. Allora $\bar{\sigma}_k = \bar{\sigma}_{k-1} \sigma_{i_k} = (1, 2, \dots, k + 1)$.

Q.E.D.

Osserviamo ora che il coniugato di una trasposizione è sempre una trasposizione, e quindi

Proposizione 4.3.2 *Se $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_1 \cdots \bar{\sigma}_r$ prodotto di trasposizioni, $\forall l \leq r$ esiste una trasposizione $\hat{\sigma}_l$, tale che $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_1 \cdots \bar{\sigma}_{l-1} \bar{\sigma}_{l+1} \cdots \bar{\sigma}_r \hat{\sigma}_l$.*

Teorema 4.3.1 *Sia X superficie analitica normale che si proietti su \mathbb{C}^2 , tramite un τ -rivestimento ramificato sulla curva $\Gamma = \{x^n + y^n = 0\}$.*

Allora possono esserci due casi:

i) n dispari, il grado del rivestimento è 2, e la superficie è analiticamente equivalente alla superficie $z^2 = x^n + y^n$.

ii) n pari, è allora il grado del rivestimento può essere un qualunque valore compreso tra 2 e $\frac{n}{2} + 1$.

Dimostrazione:

Osserviamo che nel nostro caso esistono $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{d-1} \leq n$ tali che i σ_{i_j} generano \mathcal{S}_d , e che quindi, per la Proposizione 4.3.1, hanno la proprietà che $\sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_{d-1}}$ è un d -ciclo.

Inoltre, per la Proposizione 4.3.2, $\sigma = \sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_{d-1}} \tau_1 \cdots \tau_{n-d+1}$, dove le σ_{i_j} e le τ_i sono trasposizioni.

Consideriamo ora la funzione $\nu : \mathcal{S}_d \rightarrow N$ che associa ad ogni permutazione il numero di cicli da cui è composta (Es. $\nu((1, 2, \dots, d)) = 1$; $\nu(e) = d$).

Sia ora $\bar{\sigma}$ una permutazione e τ una trasposizione.

Possono esserci due casi.

i) τ scambia due elementi appartenenti ad uno stesso ciclo di $\bar{\sigma}$. In tal caso $\nu(\bar{\sigma}\tau) = \nu(\bar{\sigma}) + 1$. Per dimostrarlo basta verificare che (per $j < n$)

$$(1, \dots, n)(1, j) = (1, \dots, j-1)(j, \dots, n).$$

ii) τ scambia due elementi appartenenti a due diversi cicli di $\bar{\sigma}$. In tal caso $\nu(\bar{\sigma}\tau) = \nu(\bar{\sigma}) - 1$. Per dimostrarlo basta verificare che

$$(1, \dots, m)(m+1, \dots, n)(1, m+1) = (1, \dots, m, m+1, \dots, n).$$

Ma allora, poiché $\sigma = e$, $\nu(\sigma) = d$; inoltre $\nu(\sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_{d-1}}) = 1 \Rightarrow n \geq 2d - 2 \Rightarrow d \leq \frac{n}{2} + 1$.

Inoltre se $\sigma = e$, è una permutazione pari, e quindi, essendo σ prodotto di n trasposizioni, n è pari.

Quindi per n dispari la tesi è dimostrata, e resta solo da dimostrare che nel caso n pari, visto che il rivestimento è possibile solo se $2 \leq d \leq \frac{n}{2} + 1$, per ciascuno di questi d esiste un rivestimento. Per il Teorema 3.3.2 basta dimostrare che $\forall d$ tale che $2 \leq d \leq \frac{n}{2} + 1$, $\exists \varphi : \pi_1(\Gamma^e) \rightarrow \mathcal{S}_d$, omomorfismo surgettivo che manda i lacci geometrici in trasposizioni. Ma questo esiste sempre; infatti basta prendere l' omomorfismo che associa ai lacci γ_i le trasposizioni σ_i così definite:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= (1, 2) \\ \sigma_2 &= (2, 3) \\ &\vdots \\ \sigma_{d-1} &= (1, d) \\ \sigma_d &= (1, d) \end{aligned}$$

$$\sigma_{d+1} = (1, d - 1)$$

⋮

$$\sigma_{2d-2} = (1, 2)$$

$$\sigma_{2d-1} = (1, 2)$$

$$\sigma_{2d} = (1, 2)$$

⋮

$$\sigma_n = (1, 2)$$

Q.E.D.

Vogliamo ora cercare di capire quando è possibile che il τ -rivestimento corrisponda ad una superficie liscia. Otteniamo la seguente

Proposizione 4.3.3 *Sia (X, φ) un τ -rivestimento di \mathbb{C}^2 ramificato sulla curva $\{x^n = y^n\}$. Se $d > 2$ è il grado del rivestimento, X liscia $\Rightarrow d = \frac{n}{2} + 1$.*

Dimostrazione:

Abbiamo già visto che se il τ -rivestimento esiste, deve essere $d \leq \frac{n}{2} + 1$. Supponiamo allora per assurdo $d \leq \frac{n}{2}$.

Procediamo come descritto nel capitolo 2 per risolvere la singolarità.

Scoppiando \mathbb{C}^2 nell'origine, abbiamo un sistema di curve che ha tutte le proprietà cercate, cioè è fatto da curve lisce, ad incroci normali, tali che mai due di esse si incontrano in più di un punto, e mai tre di esse si incontrano nello stesso punto. Sia B il $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ aggiunto.

Il sistema di curve che avremo aggiunto sulla superficie sarà formato da un certo numero di $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ che aggiungeremo per risolvere la nuova superficie in prossimità degli n punti singolari della nuova curva di ramificazione con le varietà $M(k_1, \dots, k_s)$, uniti con la controimmagine A di B .

I lacci geometrici intorno al sistema di curve sullo scoppio di \mathbb{C}^2 agiscono sulla fibra nel seguente modo: quelli intorno ai rami della curva originaria sono le γ_i e quindi agiscono come le trasposizioni σ_i ; quello intorno a B è γ e quindi agisce come $\sigma = e$.

Se costruiamo A a partire da B come descritto nel capitolo 3, otteniamo che il rivestimento di A su B ha esattamente d fogli, e gli n possibili punti di ramificazione hanno indice di ramificazione esattamente 1.

Calcoliamo la caratteristica di Eulero di A , $\chi(A)$ con la formula di Hurewicz.

$$\chi(A) = 2d - n \leq n - n = 0$$

da cui otteniamo che A non può essere un \mathbb{CP}^1 , e di conseguenza per l'osservazione 3.5.1 X non poteva essere liscia.

Q.E.D.

4.4 τ -rivestimenti ramificati in $\Gamma = \{x^p = y^q\}$

Vogliamo ripetere il ragionamento fatto nel paragrafo precedente, per vedere a quali conclusioni ci porta in questo caso più generale.

In questo paragrafo, salvo diverso avviso, tutti i numeri interi vengono considerati in \mathbb{Z}_p , tranne quando sono coinvolti in frazioni, nel qual caso sono considerati in \mathbb{Z} .

Indichiamo inoltre con $[\cdot]$ la parte intera di un numero razionale, e con $[\cdot]_p$ l'intero tra 1 e p congruo a \cdot modulo p .

Avremo questa volta p lacci geometrici generanti il gruppo fondamentale del complementare di Γ in \mathbb{C}^2 , che chiameremo γ_i , $i \in \mathbb{Z}_p$; chiameremo ancora $\gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_p$; chiameremo inoltre R_i le relazioni

$$R_1 \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_1 \gamma^{[\frac{q-1}{p}+1]} = \gamma^{[\frac{q-1}{p}+1]} \gamma_{p-q+1}$$

\vdots

$$R_q \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_q \gamma^{[\frac{q-1}{p}+1]} = \gamma^{[\frac{q-1}{p}+1]} \gamma_p$$

$$R_{q+1} \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_{q+1} \gamma^{[\frac{q-1}{p}]} = \gamma^{[\frac{q-1}{p}]} \gamma_1$$

\vdots

$$R_p \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_p \gamma^{[\frac{q-1}{p}]} = \gamma^{[\frac{q-1}{p}]} \gamma_{p-q}.$$

Allora avremo

$$\pi_1(\Gamma^c) = \frac{\mathbb{Z}^{*p}}{\langle R_1, \dots, R_p \rangle}.$$

Teorema 4.4.1 $\forall i \in \mathbb{Z}_p$, $\gamma_i = \gamma^{\frac{q}{(p,q)}} \gamma_i \gamma^{-\frac{q}{(p,q)}}$.

Dimostrazione:

Poniamo il seguente ordinamento su \mathbb{Z}_p : $1 \leq 2 \leq \dots \leq p$

Osserviamo che la relazione R_i si può scrivere $\gamma_i = \gamma^{l_i} \gamma_{p-q+i} \gamma^{-l_i}$, dove $l_i = [\frac{q-1}{p} + 1]$ se $i \leq q$, e $l_i = [\frac{q-1}{p}]$ se $i > q$.

Voglio trovare ora delle altre relazioni tra le γ_i dipendenti da quelle trovate, della forma $\gamma_i^l \gamma_i^{-l}$.

Osserviamo che $\gamma_i = \gamma^{l_i} \gamma_{p-q+1} \gamma^{-l_i} = \gamma^{l_i+l_{p-q+i}} \gamma_{2p-2q+2} \gamma^{-(l_i+l_{p-q+i})} = \dots = \gamma^{s_i} \gamma_i \gamma^{-s_i}$, dove

$$s_i = \sum_{k=1}^{\frac{p}{(p,q)}} l_{k(p-q)+i}.$$

Cerchiamo una diversa espressione di s_i .

Sia \mathcal{F}_i , per $i \in \{1, \dots, (p, q)\}$, l'insieme degli indici coinvolti nel calcolo di s_i (e di $s_{r(p-q)+i}$). \mathcal{F}_i è una partizione di \mathbb{Z}_p .

Calcolare s_i vuol dire capire quanti elementi di \mathcal{F}_i sono minori o uguali a q .

Nel caso di i tale che $p \in \mathcal{F}_i$, \mathcal{F}_i è composto da tutti e soli gli indici che sono multipli di (p, q) (ed $i = (p, q)$), e quindi è composta da $\frac{p}{(p,q)}$ elementi, e di questi sono minori o uguali a q esattamente $\frac{[q]_p}{(p,q)}$.

C'è una naturale bigezione $\mathcal{F}_i \rightarrow \mathcal{F}_{i+1}$ che manda $x \mapsto x + 1$. Se $x \leq q$, o $x + 1 \leq q$, oppure $x = q$, fatto questo che può succedere solo se $i = (p, q)$. Se $x > q$, o $x + 1 > q$, oppure $x = p$, fatto questo che può succedere solo se $i = (p, q)$.

Quindi se $i \neq (p, q)$, la mappa manda elementi minori di q in elementi minori di q , ed elementi maggiori di q in elementi maggiori di q , mentre se $i = (p, q)$ la mappa manda q in $q + 1$, p in 1, mentre mantiene per tutti gli altri elementi la loro posizione relativa a q .

Possiamo concludere che tutte le famiglie \mathcal{F}_i sono composte da $\frac{[q]_p}{(p,q)}$ elementi minori o uguali a q , e da $\frac{[p-q]_p}{(p,q)}$ elementi maggiori di q , e quindi

$$s_i = [\frac{q-1}{p}] \frac{p}{(p,q)} + \frac{[q]_p}{(p,q)} = \frac{q}{(p,q)} = s.$$

Q.E.D.

Abbiamo scoperto che valgono sui γ_i le relazioni

$$R_i \stackrel{def}{=} \gamma_i = \gamma^s \gamma_i \gamma^{-s}.$$

Siano σ_i le trasposizioni associate ai cammini γ_i , e σ la permutazione associata a γ . Ovviamente, con un ragionamento analogo a quello usato nel paragrafo precedente per dimostrare che, in quel caso, $\sigma = e$, a meno che il rivestimento abbia grado 2, otteniamo

Corollario 4.4.1 $\sigma^s = e$, oppure il grado del τ -rivestimento è 2.

Questo ci permette di trovare la seguente

Proposizione 4.4.1 Sia (X, φ) τ -rivestimento ramificato nella curva descritta dall'equazione $x^p = y^q$, con p e q dispari. Allora φ ha grado 2, ed X è analiticamente equivalente alla superficie descritta in \mathbb{C}^3 dall'equazione $z^2 = x^p - y^q$.

Dimostrazione:

Sappiamo che quel τ -rivestimento esiste ed è l'unico possibile di grado 2. Se ce ne fosse un altro, avrebbe grado maggiore, e quindi avremmo in questo caso $\sigma^s = e$. Ma tanto s quanto p sono dispari, e quindi σ^s risulta essere una permutazione dispari, che quindi non può essere l'identità.

Q.E.D.

Sia X, φ un τ -rivestimento.

Nel prosieguo del paragrafo chiameremo d il grado del rivestimento, ν la funzione che associa ad una permutazione il numero dei suoi cicli. Quando non ci sarà possibilità di confusione, con abuso di notazione, chiameremo ν il numero naturale $\nu(\sigma)$.

Poichè σ_i generano \mathcal{S}_d , $p \geq d + \nu(\sigma) - 2$ e $p + d + \nu(\sigma)$ è pari (il ragionamento da fare è esattamente lo stesso utilizzato nel capitolo precedente per dimostrare il risultato analogo per il caso "n rette").

Siano a_1, \dots, a_ν le lunghezze dei ν cicli componenti σ . Per il corollario 4.4.1 a_i divide $\frac{q}{(p,q)}$.

Consideriamo allora $\mathcal{D}_{pq} \subset \mathbb{N}$, che definiamo come l'insieme dei divisori di $\frac{q}{(p,q)}$.

Consideriamo ora tutti i modi in cui è possibile scrivere d come somma (anche con ripetizione) di elementi di \mathcal{D}_{pq} .

Sia ora \mathcal{K}_{pq} l'insieme di tutte le possibili "lunghezze" di queste somme (naturalmente con "lunghezza" di una somma intendiamo il numero di elementi che stiamo sommando).

Definiamo ora

$$\rho(p, q, d) = \min\{\nu \mid \nu \in \mathcal{K}_{pq}; p + d + \nu \text{ pari}\}.$$

Teorema 4.4.2 *Sia (X, φ) τ -rivestimento ramificato in $x^p = y^q$ di grado $d > 2$.*

La funzione $\chi(p, q, d) = p + 2 - d - \rho(p, q, d)$ è positiva.

Dimostrazione:

Sia ν il numero di cicli della permutazione σ associata al cammino γ per questo rivestimento.

Sappiamo che $\nu \leq p + 2 - d$.

D'altronde per definizione $\rho(p, q, d)$ è una stima dal basso del numero di cicli di cui può essere composta $\sigma \Rightarrow \rho(p, q, d) \leq \nu \Rightarrow \rho(p, q, d) \leq p + 2 - d$ che è la tesi.

Q.E.D.

Proposizione 4.4.2 $\chi(p, q, d + 1) \geq \chi(p, q, d) - 2$

Dimostrazione:

Sia $\rho = \rho(p, q, d)$

Siano a_1, \dots, a_ρ una famiglia di numeri naturali in \mathcal{K}_{pq} tali che $p + d + \rho$ sia pari e $\sum_1^\rho a_i = d$. La famiglia $a_1, \dots, a_\rho, 1 = a_{\rho+1}$, è una famiglia di numeri naturali in \mathcal{K}_{pq} con $p + d + 1 + \rho + 1$ pari e $\sum_1^{\rho+1} a_i = d + 1 \Rightarrow \rho(p, q, d + 1) \leq \rho(p, q, d) + 1$.

Ma allora $\chi(p, q, d + 1) = p + 2 - d - 1 - \rho(p, q, d + 1) \geq p - d - \rho(p, q, d) = \chi(p, q, d) - 2$.

Q.E.D.

A questo punto può essere utile segnalare che i risultati fin qui trovati non appaiono simmetrici in p e q , mentre il problema è simmetrico. Quindi tutti i risultati possono essere riformulati sostituendo p con q e q con p .

4.5 τ -rivestimenti ramificati in $\Gamma = \{x(x^3 + y^2) = 0\}$

Calcoliamo il gruppo fondamentale del complementare.

Risulta essere

$$\pi_1(\Gamma^c) = \frac{\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}}{\langle R_i \rangle}$$

dove le R_i sono le seguenti (γ_i lacci geometrici generanti, $\gamma = \gamma_1\gamma_2\gamma_3$):

$$\gamma_1 = \gamma\gamma_1\gamma^{-1}$$

$$\gamma_2 = \gamma\gamma_2\gamma_3\gamma_2^{-1}\gamma^{-1}$$

$$\gamma_3 = \gamma\gamma_2\gamma^{-1}.$$

Il fatto di avere trovato tre generatori ci fa immediatamente concludere che non sono possibili τ -rivestimenti di ordine superiore a 4.

Di grado 2 sappiamo già che, come al solito, ne esiste uno solo, e precisamente quello descritto dall'equazione $z^2 = x(x^3 + y^2)$.

Vediamo ora se ne esistono di grado 4.

Chiameremo, come al solito, $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ le permutazioni associate rispettivamente ai cammini $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

Possiamo supporre $\sigma_1 = (1, 2)$.

La σ è una permutazione dispari e per la R_1 o non sposta 1 e 2, o li manda l'uno nell'altro $\Rightarrow \sigma = (1, 2)$ oppure $\sigma = (3, 4)$. Se fosse $\sigma_2 = (1, 2)$ avrei per la R_3 $\sigma_3 = (1, 2)$ e l'omomorfismo non sarebbe surgettivo, assurdo.

Supponiamo $\sigma = (1, 2)$.

Se σ_2 non spostasse un elemento tra 3 e 4, per la R_3 lo stesso elemento non sarebbe spostato neanche da σ_3 , e l'omomorfismo non sarebbe surgettivo, assurdo.

Allora deve essere $\sigma_2 = (3, 4)$, da cui, sempre per la R_3 , $\sigma_3 = (3, 4)$, ma allora ancora le σ_i non genererebbero \mathcal{S}_4 , assurdo.

Possiamo supporre allora invece $\sigma = (3, 4)$

Se fosse $\sigma_2 = (2, 3)$, per la R_3 avrei $\sigma_3 = (2, 4)$, e quindi, moltiplicando le σ_i , $\sigma = (1, 3, 4, 2)$ assurdo.

Allora deve essere $\sigma_2 = (3, 4)$, da cui, sempre per la R_3 , $\sigma_3 = (3, 4)$, ma allora $\sigma = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = (1, 2)$ assurdo.

Di conseguenza non esistono τ -rivestimenti di grado 4 ramificati su questa curva.

Vediamo ora quanti ce ne possono essere di grado 3.

Ancora possiamo supporre $\sigma_1 = (1, 2)$.

σ è una permutazione dispari di \mathcal{S}_3 che lascia fissi sia 1 che 2, o li scambia. In questo caso allora abbiamo una sola possibilità: $\sigma = (1, 2)$.

Se fosse $\sigma_2 = (1, 2)$ avrei, per la R_3 , $\sigma_3 = (1, 2)$ assurdo perchè le σ_i non genererebbero \mathcal{S}_3 .

Se fosse $\sigma_2 = (2, 3)$, per la R_3 avrei $\sigma_3 = (1, 3)$, che implicherebbe $\sigma = (2, 3)$ assurdo.

Quindi in questo caso esiste un solo possibile τ -rivestimento, ha grado 2 ed è quello conosciuto.

Bibliografia

- [L] Laufer, H., *Normal two-dimensional singularities*, Ann. of Math. Studies 71, Princeton Univ. Press, Princeton, 1971.
- [F] Fischer, G., *Complex analytic geometry*, Lect. notes in Math., Springer-Verlag, Berlino, 1976.
- [M] Mumford, D., *The topology of normal singularities and a criterion for simplicity*, Inst. des Hautes Études Scientifiques, Publ. Math. 9, pg. 5-22, 1961.
- [N] Narasimhan, R., *Introduction to the theory of analytic spaces*, Lect. Notes in Math., Springer-Verlag, Berlino, 1966.

Ringraziamenti

Vorrei ringraziare tutti coloro senza i quali questa tesi non sarebbe stata possibile.

Innanzitutto un ringraziamento per il professor F. Lazzeri, per l'aiuto e per la pazienza che ha dimostrato nel seguire questo lavoro.

Un ringraziamento particolare va inoltre al professor F. Bardelli, che è stato il primo ad indirizzarmi verso questo campo di ricerca.

Per il sostegno morale e scientifico ringrazio inoltre la mia famiglia, i miei compagni di appartamento, i miei colleghi del Dipartimento di Matematica e della Scuola Normale Superiore, e tutti i miei amici, in particolare Alessandro, Chris, Clelia e Giuseppe.