

Superfici di genere zero

Roberto Pignatelli

8 marzo 2012

Giornate di Geometria 3

Outline

- 1 Perché?
 - La congettura di Noether
 - Superfici di tipo generale
- 2 Cosa?
 - Botanica
 - La nostra costruzione
 - La mappa bicanonica
- 3 Come?
 - Un rivestimento tridoppio
 - Un ulteriore rivestimento doppio
 - Bibliografia

Outline

- 1 Perché?
 - La congettura di Noether
 - Superfici di tipo generale
- 2 Cosa?
 - Botanica
 - La nostra costruzione
 - La mappa bicanonica
- 3 Come?
 - Un rivestimento tridoppio
 - Un ulteriore rivestimento doppio
 - Bibliografia



Conggettura di M. Noether

L'unica curva complessa compatta liscia senza forme differenziali olomorfe non nulle è la sfera di Riemann \mathbb{P}^1 .

Conggettura di M. Noether

L'unica curva complessa compatta liscia senza forme differenziali olomorfe non nulle è la sfera di Riemann \mathbb{P}^1 .

In questo talk, a meno che dica esplicitamente il contrario, una superficie è sempre una varietà algebrica complessa proiettiva e liscia di dimensione 2.

Ad una superficie S associamo

- il **genere** (geometrico) $p_g := h^0(\Omega_S^2) = h^0(\mathcal{O}(K_S))$
- l'**irregolarità** $q := h^1(\mathcal{O}_S) = h^0(\Omega_S^1)$

Controesempio di F.Enriques

Ciò motivò verso la fine del XIX secolo la

Congettura di M.Noether

Ogni superficie con $p_g = q = 0$ è razionale, ossia birazionale al piano proiettivo \mathbb{P}^2 .

Controesempio di F.Enriques

Ciò motivò verso la fine del XIX secolo la

Congettura di M.Noether

Ogni superficie con $p_g = q = 0$ è razionale, ossia birazionale al piano proiettivo \mathbb{P}^2 .

Controesempio di F. Enriques

F. Enriques costruì nel 1896 una superficie S con $p_g(S) = q(S) = 0$ e $\pi_1(S) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, quindi non razionale.

Controesempio di F.Enriques

Il fibrato canonico della superficie di Enriques è un fibrato di 2 torsione: $\mathcal{O}_S(2K_S) := \Omega^2(S) \otimes \Omega^2(S) \cong \mathcal{O}_S$.

Definizione

L' n -simo **plurigenero** di una superficie S è
 $P_n(S) := h^0(\mathcal{O}_S(nK_S)) = h^0((\Omega_S^2)^{\otimes n})$.

Controesempio di F.Enriques

Il fibrato canonico della superficie di Enriques è un fibrato di 2 torsione: $\mathcal{O}_S(2K_S) := \Omega^2(S) \otimes \Omega^2(S) \cong \mathcal{O}_S$.

Definizione

L' n -simo **plurigenero** di una superficie S è $P_n(S) := h^0(\mathcal{O}_S(nK_S)) = h^0((\Omega_S^2)^{\otimes n})$.

Quindi la superficie di Enriques ha **bigenero** $P_2 = 1$.

Controesempio di F.Enriques

Il fibrato canonico della superficie di Enriques è un fibrato di 2 torsione: $\mathcal{O}_S(2K_S) := \Omega^2(S) \otimes \Omega^2(S) \cong \mathcal{O}_S$.

Definizione

L' n -simo **plurigenere** di una superficie S è
 $P_n(S) := h^0(\mathcal{O}_S(nK_S)) = h^0((\Omega_S^2)^{\otimes n})$.

Quindi la superficie di Enriques ha **bigenere** $P_2 = 1$.
L'esempio di Enriques portò pochi anni dopo al

Criterio di razionalità di Castelnuovo

Una superficie S è razionale se e solo se $P_2(S) = q(S) = 0$.

Controesempio di F.Enriques

Il fibrato canonico della superficie di Enriques è un fibrato di 2 torsione: $\mathcal{O}_S(2K_S) := \Omega^2(S) \otimes \Omega^2(S) \cong \mathcal{O}_S$.

Definizione

L' n -simo **plurigenero** di una superficie S è $P_n(S) := h^0(\mathcal{O}_S(nK_S)) = h^0((\Omega_S^2)^{\otimes n})$.

Quindi la superficie di Enriques ha **bigenero** $P_2 = 1$.
L'esempio di Enriques portò pochi anni dopo al

Criterio di razionalità di Castelnuovo

Una superficie S è razionale se e solo se $P_2(S) = q(S) = 0$.

Quindi una superficie non razionale senza forme differenziali, ha un fibrato canonico molto particolare.

Outline

- 1 Perché?
 - La congettura di Noether
 - Superfici di tipo generale
- 2 Cosa?
 - Botanica
 - La nostra costruzione
 - La mappa bicanonica
- 3 Come?
 - Un rivestimento tridoppio
 - Un ulteriore rivestimento doppio
 - Bibliografia

Definizione

Una superficie S si dice di *tipo generale* se l'andamento asintotico di P_n è il massimo possibile, ossia se $P_n(S) \sim n^2$.

Per esse $p_g = 0 \Rightarrow q = 0$.

Definizione

Una superficie S si dice di *tipo generale* se l'andamento asintotico di P_n è il massimo possibile, ossia se $P_n(S) \sim n^2$.

Per esse $p_g = 0 \Rightarrow q = 0$.

La *Classificazione di Enriques-Kodaira* descrive (più o meno dettagliatamente) le superfici non di tipo generale, ma non dice nulla sulle superfici di tipo generale.

Definizione

Una superficie S si dice di *tipo generale* se l'andamento asintotico di P_n è il massimo possibile, ossia se $P_n(S) \sim n^2$.

Per esse $p_g = 0 \Rightarrow q = 0$.

La *Classificazione di Enriques-Kodaira* descrive (più o meno dettagliatamente) le superfici non di tipo generale, ma non dice nulla sulle superfici di tipo generale.

Teorema di Bombieri (e altri)

Sia S il modello canonico di una superficie di tipo generale. Allora la mappa 5-canonica (indotta da $h^0(5K_S)$) è un embedding.

...

Definizione

Una superficie S si dice di *tipo generale* se l'andamento asintotico di P_n è il massimo possibile, ossia se $P_n(S) \sim n^2$.

Per esse $p_g = 0 \Rightarrow q = 0$.

La *Classificazione di Enriques-Kodaira* descrive (più o meno dettagliatamente) le superfici non di tipo generale, ma non dice nulla sulle superfici di tipo generale.

Teorema di Bombieri (e altri)

Sia S il modello canonico di una superficie di tipo generale. Allora la mappa 5-canonica (indotta da $h^0(5K_S)$) è un embedding.

...

Se la mappa bicanonica non è un morfismo gen. finito, allora $p_g = 0$ e $P_2 \leq 5$.

Altre motivazioni

Congettura di Bloch

Il gruppo degli 0-cicli di grado 0 modulo equivalenza razionale di una superficie è *finito dimensionale* se e soltanto se è banale, se e soltanto se la superficie ha genere 0.

Altre motivazioni

Congettura di Bloch

Il gruppo degli 0-cicli di grado 0 modulo equivalenza razionale di una superficie è *finito dimensionale* se e soltanto se è banale, se e soltanto se la superficie ha genere 0.

È non nota solo per le superfici di tipo generale con genere zero.

Altre motivazioni

Congettura di Bloch

Il gruppo degli 0-cicli di grado 0 modulo equivalenza razionale di una superficie è *finito dimensionale* se e soltanto se è banale, se e soltanto se la superficie ha genere 0.

È non nota solo per le superfici di tipo generale con genere zero.

Problema di Hirzebruch

Quante strutture complesse ci sono su una superficie razionale?

Altre motivazioni

Congettura di Bloch

Il gruppo degli 0-cicli di grado 0 modulo equivalenza razionale di una superficie è *finito dimensionale* se e soltanto se è banale, se e soltanto se la superficie ha genere 0.

È non nota solo per le superfici di tipo generale con genere zero.

Problema di Hirzebruch

Quante strutture complesse ci sono su una superficie razionale?

Sia S una superficie omeomorfa ad una superficie razionale. Allora S è razionale oppure di tipo generale e genere zero.

Outline

- 1 Perché?
 - La congettura di Noether
 - Superfici di tipo generale
- 2 Cosa?
 - **Botanica**
 - La nostra costruzione
 - La mappa bicanonica
- 3 Come?
 - Un rivestimento tridoppio
 - Un ulteriore rivestimento doppio
 - Bibliografia



Superfici di tipo generale con $p_g = 0$

Se S è una superficie di tipo generale con $p_g(S) = 0$, allora $2 \leq P_2(S) \leq 10$.

Superfici di tipo generale con $p_g = 0$

Se S è una superficie di tipo generale con $p_g(S) = 0$, allora $2 \leq P_2(S) \leq 10$. Modulo birazionalità:

- Ce ne sono esattamente 100 con $P_2 = 10$ (PY-CS '09).

Superfici di tipo generale con $p_g = 0$

Se S è una superficie di tipo generale con $p_g(S) = 0$, allora $2 \leq P_2(S) \leq 10$. Modulo birazionalità:

- Ce ne sono esattamente 100 con $P_2 = 10$ (PY-CS '09).
- Se $P_2 = 2$ (num. Godeaux) $\pi_1^{alg}(S)$ è ciclico di ordine al più 5. Tutti i 5 gruppi sono possibili; il caso $|\pi_1^{alg}(S)| \geq 3$ è classificato. [Barlow, Bombieri, Reid... '80s]

Superfici di tipo generale con $p_g = 0$

Se S è una superficie di tipo generale con $p_g(S) = 0$, allora $2 \leq P_2(S) \leq 10$. Modulo birazionalità:

- Ce ne sono esattamente 100 con $P_2 = 10$ (PY-CS '09).
- Se $P_2 = 2$ (num. Godeaux) $\pi_1^{alg}(S)$ è ciclico di ordine al più 5. Tutti i 5 gruppi sono possibili; il caso $|\pi_1^{alg}(S)| \geq 3$ è classificato. [Barlow, Bombieri, Reid... '80s]
- Se $P_2 = 3$ (num. Campedelli) $\pi_1^{alg}(S)$ è il gruppo dei quaternioni oppure abeliano di ordine al più 9. Tutti tali gruppi sono possibili; il caso $|\pi_1^{alg}(S)| \geq 8$ è classificato. [Mendes Lopes, Pardini, Reid,... completato nel 2011 con la costruzione di un esempio con $\pi_1 = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ di Frapporti e Park-Park-Shin.]

Superfici di tipo generale con $p_g = 0$

Se S è una superficie di tipo generale con $p_g(S) = 0$, allora $2 \leq P_2(S) \leq 10$. Modulo birazionalità:

- Ce ne sono esattamente 100 con $P_2 = 10$ (PY-CS '09).
- Se $P_2 = 2$ (num. Godeaux) $\pi_1^{alg}(S)$ è ciclico di ordine al più 5. Tutti i 5 gruppi sono possibili; il caso $|\pi_1^{alg}(S)| \geq 3$ è classificato. [Barlow, Bombieri, Reid... '80s]
- Se $P_2 = 3$ (num. Campedelli) $\pi_1^{alg}(S)$ è il gruppo dei quaternioni oppure abeliano di ordine al più 9. Tutti tali gruppi sono possibili; il caso $|\pi_1^{alg}(S)| \geq 8$ è classificato. [Mendes Lopes, Pardini, Reid,... completato nel 2011 con la costruzione di un esempio con $\pi_1 = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ di Frapporti e Park-Park-Shin.]
- $\forall P_2 \geq 5$ ci sono esempi con $\pi_1^{alg}(S) = \infty$.

Superfici di tipo generale con $p_g = 0$, $P_2 = 4$

Congettura di M. Reid

Se S è una superficie di tipo generale con $p_g = 0$ e $P_2 = 4$, allora $|\pi_1^{alg}(S)| \leq 16$.



Superfici di tipo generale con $p_g = 0$, $P_2 = 4$

Congettura di M. Reid

Se S è una superficie di tipo generale con $p_g = 0$ e $P_2 = 4$, allora $|\pi_1^{alg}(S)| \leq 16$.

Costruzioni note sono

- una famiglia 1-dimensionale dovuta a Burniat (*Burniat terziarie*) con gruppo fondamentale $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}_8$ (1966);

Superfici di tipo generale con $p_g = 0$, $P_2 = 4$

Conggettura di M. Reid

Se S è una superficie di tipo generale con $p_g = 0$ e $P_2 = 4$, allora $|\pi_1^{alg}(S)| \leq 16$.

Costruzioni note sono

- una famiglia 1-dimensionale dovuta a Burniat (*Burniat terziarie*) con gruppo fondamentale $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}_8$ (1966);
- una famiglia dovuta a Keum (e *ampiata* da MP) con $\pi_1 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ (1994);

Superfici di tipo generale con $p_g = 0$, $P_2 = 4$

Congettura di M. Reid

Se S è una superficie di tipo generale con $p_g = 0$ e $P_2 = 4$, allora $|\pi_1^{alg}(S)| \leq 16$.

Costruzioni note sono

- una famiglia 1-dimensionale dovuta a Burniat (*Burniat terziarie*) con gruppo fondamentale $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}_8$ (1966);
- una famiglia dovuta a Keum (e *ampliata* da MP) con $\pi_1 = \mathbb{Z}_{/2\mathbb{Z}}^2 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ (1994);
- esempi con $\pi_1 = \{0\}$ o $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ [PPS08-09];
- esempi con gruppo fondamentale $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ([BP10]);
- esempi con $\pi_1 = \mathbb{Q}_8$, D_4 , D_3 , $\mathbb{Z}/14\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_{/2\mathbb{Z}}^2$, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ([CS10])



Rivestimenti bidoppi

Un rivestimento bidoppio di una varietà X è

- una varietà Y con un'azione di $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$;
- un isomorfismo $Y/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \cong X$.

Rivestimenti bidoppi

Un rivestimento bidoppio di una varietà X è

- una varietà Y con un'azione di $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$;
- un isomorfismo $Y/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \cong X$.

Il modello locale è il seguente: sia $U \subset \mathbb{C}^n$ è aperto; la sottovarietà di $U \times \mathbb{C}^3$ di equazione

$$\text{rango} \begin{pmatrix} \delta_1 & z_1 & z_2 \\ z_1 & \delta_2 & z_3 \\ z_2 & z_3 & \delta_3 \end{pmatrix} \leq 2$$

(dove z_i sono le coordinate di \mathbb{C}^3 , e δ_i sono funzioni su U), è un rivestimento bidoppio di U .

Rivestimenti bidoppi

Un rivestimento bidoppio di una varietà X è

- una varietà Y con un'azione di $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$;
- un isomorfismo $Y/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \cong X$.

Il modello locale è il seguente: sia $U \subset \mathbb{C}^n$ è aperto; la sottovarietà di $U \times \mathbb{C}^3$ di equazione

$$\text{rango} \begin{pmatrix} \delta_1 & z_1 & z_2 \\ z_1 & \delta_2 & z_3 \\ z_2 & z_3 & \delta_3 \end{pmatrix} \leq 2$$

(dove z_i sono le coordinate di \mathbb{C}^3 , e δ_i sono funzioni su U), è un rivestimento bidoppio di U . Se $D_i = (\delta_i)$, l'insieme dei valori critici di π è $D_1 + D_2 + D_3$.

Rivestimenti bidoppi

Un rivestimento bidoppio di una varietà X è

- una varietà Y con un'azione di $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$;
- un isomorfismo $Y/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \cong X$.

Similmente, il luogo di ramificazione di un rivestimento bidoppio si *spezza* come somma di tre divisori: $D_1 + D_2 + D_3$.

Rivestimenti bidoppi

Un rivestimento bidoppio di una varietà X è

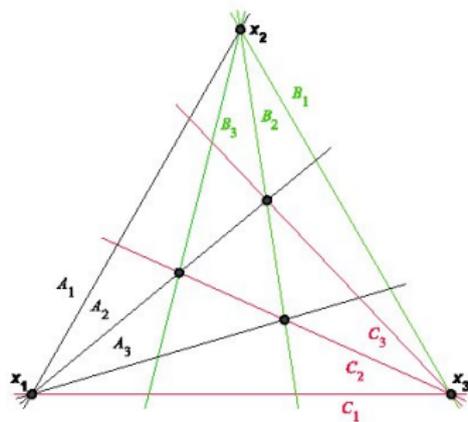
- una varietà Y con un'azione di $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$;
- un isomorfismo $Y/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \cong X$.

Similmente, il luogo di ramificazione di un rivestimento bidoppio si *spezza* come somma di tre divisori: $D_1 + D_2 + D_3$.

Se X è semplicemente connesso, dare un rivestimento bidoppio è equivalente a dare tre divisori D_i tali che $D_i + D_j$ sia divisibile per due nel gruppo di Picard.

La costruzione di Burniat

Le Burniat terziarie sono rivestimenti bidoppi del piano in cui ciascun divisore di ramificazione è formato da tre rette. Le configurazione delle nove rette è descritta dal seguente disegno, dove a ciascun divisore è attribuito un diverso colore.



Outline

- 1 Perché?
 - La congettura di Noether
 - Superfici di tipo generale
- 2 Cosa?
 - Botanica
 - **La nostra costruzione**
 - La mappa bicanonica
- 3 Come?
 - Un rivestimento tridoppio
 - Un ulteriore rivestimento doppio
 - Bibliografia



Un gruppo di automorfismi di $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$

Si consideri \mathbb{C}^8 con coordinate t_{jk} , $j \in \{0 \dots 3\}$, $k \in \{0, 1\}$, e il gruppo di automorfismi \tilde{G} generato dai seguenti

$jk =$	00	01	10	11	20	21	30	31
$I(t_{jk}) =$	t_{11}	t_{10}	t_{01}	$-t_{00}$	t_{30}	t_{31}	t_{20}	$-t_{21}$
$J(t_{jk}) =$	t_{21}	t_{20}	t_{30}	$-t_{31}$	t_{01}	$-t_{00}$	t_{10}	t_{11}
$K(t_{jk}) =$	t_{31}	t_{30}	t_{20}	t_{21}	t_{10}	$-t_{11}$	t_{01}	$-t_{00}$
$A(t_{jk}) =$	t_{01}	$i \cdot t_{00}$	t_{11}	$-i \cdot t_{10}$	t_{21}	$-i \cdot t_{20}$	t_{31}	$-i \cdot t_{30}$

Come al solito, $i := \sqrt{-1}$.

Un gruppo di automorfismi di $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$

Si consideri \mathbb{C}^8 con coordinate t_{jk} , $j \in \{0 \dots 3\}$, $k \in \{0, 1\}$, e il gruppo di automorfismi \tilde{G} generato dai seguenti

$jk =$	00	01	10	11	20	21	30	31
$I(t_{jk}) =$	t_{11}	t_{10}	t_{01}	$-t_{00}$	t_{30}	t_{31}	t_{20}	$-t_{21}$
$J(t_{jk}) =$	t_{21}	t_{20}	t_{30}	$-t_{31}$	t_{01}	$-t_{00}$	t_{10}	t_{11}
$K(t_{jk}) =$	t_{31}	t_{30}	t_{20}	t_{21}	t_{10}	$-t_{11}$	t_{01}	$-t_{00}$
$A(t_{jk}) =$	t_{01}	$i \cdot t_{00}$	t_{11}	$-i \cdot t_{10}$	t_{21}	$-i \cdot t_{20}$	t_{31}	$-i \cdot t_{30}$

Come al solito, $i := \sqrt{-1}$.

Il gruppo indotto G di automorfismi di $(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1)^4$ è isomorfo a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}_8$.

Segre embedding

Consideriamo l'immersione di Segre

$$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{15}$$

e l'azione indotta di G su $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{15}$.

Segre embedding

Consideriamo l'immersione di Segre

$$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{15}$$

e l'azione indotta di G su $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{15}$.

Se H è la classe della sezione iperpiana

$$\dim |H|^G = 0 \quad \dim |2H|^G = 5$$

$|2H|^G$ non ha punti base. L'unica sezione iperpiana "invariante" è, nella coordinate di $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, l'ipersuperficie

$$Z_1 := \{t_{01}t_{10}t_{20}t_{30} + t_{00}t_{11}t_{21}t_{31} = 0\} \subset (\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1)^4 \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{15}$$

una 3-varietà di Fano con 6 punti doppi (localmente della forma $\{xy = zw\} \subset \mathbb{C}^4$).

La costruzione

Theorem (J. Neves, - '11)

Sia $Z_2 \in |2H|^G \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{15}$ generica.

La costruzione

Theorem (J. Neves, - '11)

Sia $Z_2 \in |2H|^G \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{15}$ generica.

Allora $T := Z_1 \cap Z_2$ è una superficie con sistema canonico $|H|_T$ su cui $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Q}_8$ agisce liberamente.

La costruzione

Theorem (J. Neves, - '11)

Sia $Z_2 \in |2H|^G \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{15}$ generica.

Allora $T := Z_1 \cap Z_2$ è una superficie con sistema canonico $|H|_T$ su cui $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Q}_8$ agisce liberamente.

Il quoziente $S := T/G$ è il modello canonico di una superficie di tipo generale con $p_g(S) = 0$, $P_2(S) = 4$ e $\pi_1(S) = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Q}_8$.

La costruzione

Theorem (J. Neves, - '11)

Sia $Z_2 \in |2H|^G \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{15}$ generica.

Allora $T := Z_1 \cap Z_2$ è una superficie con sistema canonico $|H|_T$ su cui $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Q}_8$ agisce liberamente.

Il quoziente $S := T/G$ è il modello canonico di una superficie di tipo generale con $p_g(S) = 0$, $P_2(S) = 4$ e $\pi_1(S) = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Q}_8$.

Le superfici S ottenute formano una famiglia 4-dimensionale nello spazio dei moduli delle superfici di tipo generale contenente le Burniat terziarie.

Contemporaneamente Bauer e Catanese [BC10], studiando le deformazioni delle superficie di Burniat, hanno costruito un'altra famiglia 4-dimensionale contenente le Burniat terziarie, e dimostrato che è un aperto *proprio* di una componente irriducibile dello spazio dei moduli.

Contemporaneamente Bauer e Catanese [BC10], studiando le deformazioni delle superficie di Burniat, hanno costruito un'altra famiglia 4-dimensionale contenente le Burniat terziarie, e dimostrato che è un aperto *proprio* di una componente irriducibile dello spazio dei moduli.

Completando il loro lavoro, poche settimane fa

Theorem (Y. Chen '12)

La famiglia appena descritta forma una componente irriducibile dello spazio dei moduli.

Contemporaneamente Bauer e Catanese [BC10], studiando le deformazioni delle superficie di Burniat, hanno costruito un'altra famiglia 4-dimensionale contenente le Burniat terziarie, e dimostrato che è un aperto *proprio* di una componente irriducibile dello spazio dei moduli.

Completando il loro lavoro, poche settimane fa

Theorem (Y. Chen '12)

La famiglia appena descritta forma una componente irriducibile dello spazio dei moduli.

Congetturiamo che la famiglia formi una componente connessa dello spazio dei moduli: Y. Chen sta cercando di dimostrarlo proprio usando la nostra descrizione.

Outline

- 1 Perché?
 - La congettura di Noether
 - Superfici di tipo generale
- 2 Cosa?
 - Botanica
 - La nostra costruzione
 - **La mappa bicanonica**
- 3 Come?
 - Un rivestimento tridoppio
 - Un ulteriore rivestimento doppio
 - Bibliografia



La mappa bicanonica delle nostre superfici

La mappa bicanonica $\varphi|_{2K_S}: S \rightarrow \mathbb{P}^3$ è un morfismo di grado 4 su una superficie cubica con, se S è generale, tre nodi.

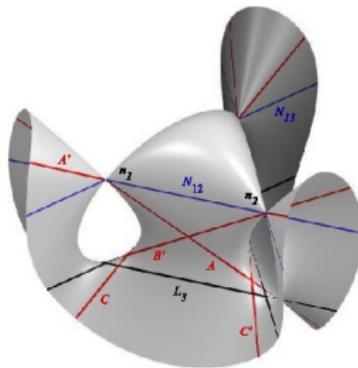


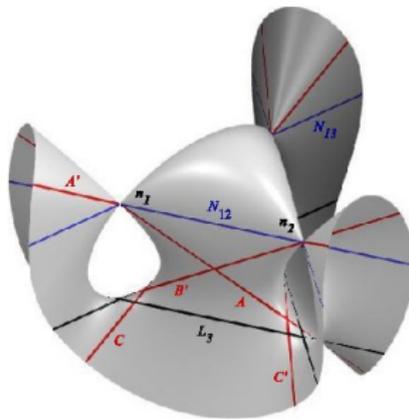
Figure: Le 12 rette di una cubica con tre nodi

$\varphi|_{2K_S}$ è un rivestimento bidoppio, con divisori di ramificazione $C_i + L_i$ ($1 \leq i \leq 3$) dove L_i sono le rette nere in figura, C_i coniche.

Come rivestimento bidoppio del piano

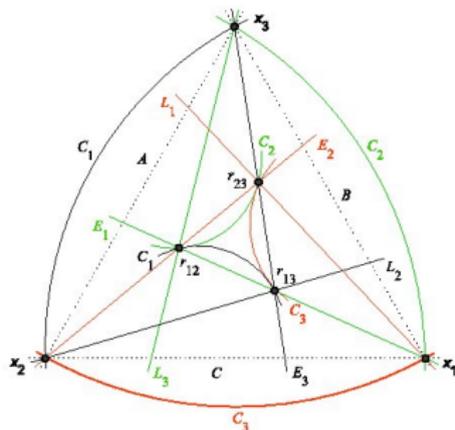
Una cubica con tre nodi è birazionale a $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ mediante una mappa che scoppia i tre nodi e contrae le rette blu N_{ij} e tre rette rosse a due a due disgiunte (A' , B' e C').

Questo ci permette di descrivere le nostre superfici (birazionalmente) come rivestimenti bidoppi del piano.



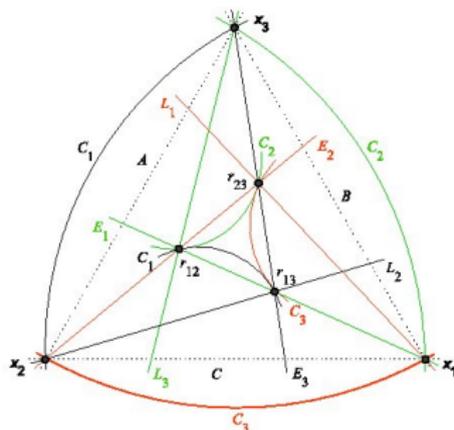
Come rivestimento bidoppio del piano

Le rette N_{ij} si contraggono sui punti r_{ij} , A' , B' , C' sui punti x_i . L_i , A , B , C , C_i sono le immagini delle omonime curve, ed hanno lo stesso grado. E_i sono i divisori eccezionali ottenuti scoppiando i nodi.



Come rivestimento bidoppio del piano

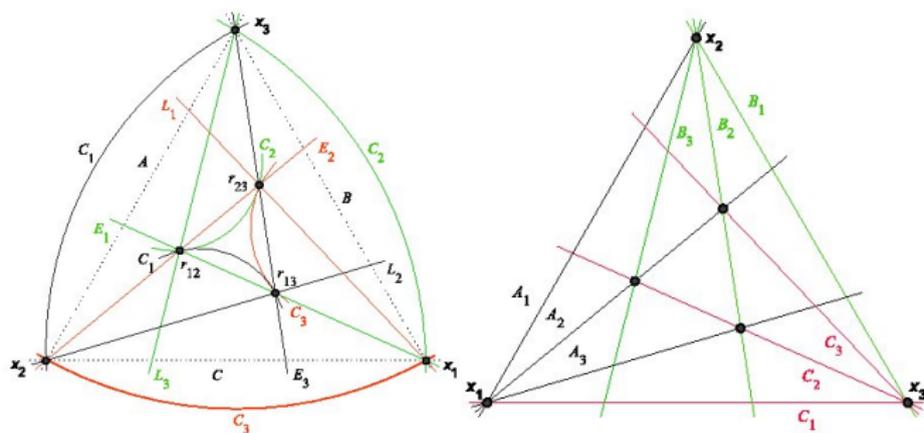
Le rette N_{ij} si contraggono sui punti r_{ij} , A' , B' , C' sui punti x_i . L_i , A , B , C , C_i sono le immagini delle omonime curve, ed hanno lo stesso grado. E_i sono i divisori eccezionali ottenuti scoppiando i nodi.



Il disegno ha 4 moduli: uno dalla disposizione dei 6 punti, uno da ciascuna conica.

Degenerando alle Burniat

Una semplice degenerazione si ottiene degenerando C_1 a $A + E_1$, C_2 a $B + E_2$, C_3 a $C + L_3$.



Le rette E_i diventano *bicolori*: il rivestimento bidoppio descritto dal disegno è non normale. Le superfici di Burniat terziarie ne sono la normalizzazione.

Problemi

Sia T il rivestimento universale di una superficie di tipo generale di genere zero e bigenere 4 con gruppo fondamentale G di ordine 16.

Se la mappa canonica è un morfismo birazionale, immerge T come superficie di grado 48 in \mathbb{P}^{14} , e G agisce su (\mathbb{P}^{14}, T) , liberamente su T .

Problemi

Sia T il rivestimento universale di una superficie di tipo generale di genere zero e bigenere 4 con gruppo fondamentale G di ordine 16.

Se la mappa canonica è un morfismo birazionale, immerge T come superficie di grado 48 in \mathbb{P}^{14} , e G agisce su (\mathbb{P}^{14}, T) , liberamente su T .

L'esempio che abbiamo visto è dato dall'intersezione di un divisore anticanonico e uno semianticanonico di $(\mathbb{P}^1)^4$.

Problemi

Sia T il rivestimento universale di una superficie di tipo generale di genere zero e bigenere 4 con gruppo fondamentale G di ordine 16.

Se la mappa canonica è un morfismo birazionale, immerge T come superficie di grado 48 in \mathbb{P}^{14} , e G agisce su (\mathbb{P}^{14}, T) , liberamente su T .

L'esempio che abbiamo visto è dato dall'intersezione di un divisore anticanonico e uno semianticanonico di $(\mathbb{P}^1)^4$.

Domanda

Si può usare questo esempio per costruire altre famiglie?

Problemi

Sia T il rivestimento universale di una superficie di tipo generale di genere zero e bigenere 4 con gruppo fondamentale G di ordine 16.

Se la mappa canonica è un morfismo birazionale, immerge T come superficie di grado 48 in \mathbb{P}^{14} , e G agisce su (\mathbb{P}^{14}, T) , liberamente su T .

L'esempio che abbiamo visto è dato dall'intersezione di un divisore anticanonico e uno semianticanonico di $(\mathbb{P}^1)^4$.

Domanda

Si può usare questo esempio per costruire altre famiglie?

Una costruzione di Bini e Favale con gruppo $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ sembrerebbe funzionare, dando un nuovo esempio. Ce ne sono altri?

Problemi

Sia T il rivestimento universale di una superficie di tipo generale di genere zero e bigenere 4 con gruppo fondamentale G di ordine 16.

Se la mappa canonica è un morfismo birazionale, immerge T come superficie di grado 48 in \mathbb{P}^{14} , e G agisce su (\mathbb{P}^{14}, T) , liberamente su T .

L'esempio che abbiamo visto è dato dall'intersezione di un divisore anticanonico e uno semianticanonico di $(\mathbb{P}^1)^4$.

Domanda

Ci sono altre superfici di grado T di grado 48 in \mathbb{P}^{14} , invarianti per l'azione di un gruppo $G < Aut(\mathbb{P}^{14})$, $|G| = 16$, che agisce liberamente su di esse?

Outline

- 1 Perché?
 - La congettura di Noether
 - Superfici di tipo generale
- 2 Cosa?
 - Botanica
 - La nostra costruzione
 - La mappa bicanonica
- 3 **Come?**
 - **Un rivestimento tridoppio**
 - Un ulteriore rivestimento doppio
 - Bibliografia

Cercavamo superfici con $p_g = 0$, $P_2 = 4$ aventi un rivestimento tridoppio étale $S' \rightarrow S$; quindi stiamo cercando una superficie S' con $p_g(S') = 7$, $K_{S'}^2 = 24$ e un'azione libera di $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$.

Cercavamo superfici con $p_g = 0$, $P_2 = 4$ aventi un rivestimento tridoppio étale $S' \rightarrow S$; quindi stiamo cercando una superficie S' con $p_g(S') = 7$, $K_{S'}^2 = 24$ e un'azione libera di $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$.

Supponiamo inoltre che S' sia contenuta come divisore antibicanonico in una 3-varietà di Fano V : $S' \in |-2K_V|$.

Proiettando su \mathbb{P}^6

Studiando la funzione di Hilbert si dimostra facilmente che l'immagine anticanonica di V (cioé la proiezione sul \mathbb{P}^6 dato dalle variabili di grado 1) è intersezione completa di 3 quadriche.

Proiettando su \mathbb{P}^6

Studiando la funzione di Hilbert si dimostra facilmente che l'immagine anticanonica di V (cioè la proiezione sul \mathbb{P}^6 dato dalle variabili di grado 1) è intersezione completa di 3 quadriche.

Il *graded rings database* suggerisce inoltre che tale proiezione possa essere composizione seriale di 8 proiezioni, ciascuna da un punto interno alla varietà e contenuto nel luogo (singolare) dato dalle variabili di grado 2.

Proiettando su \mathbb{P}^6

Studiando la funzione di Hilbert si dimostra facilmente che l'immagine anticanonica di V (cioé la proiezione sul \mathbb{P}^6 dato dalle variabili di grado 1) è intersezione completa di 3 quadriche.

Il *graded rings database* suggerisce inoltre che tale proiezione possa essere composizione seriale di 8 proiezioni, ciascuna da un punto interno alla varietà e contenuto nel luogo (singolare) dato dalle variabili di grado 2.

Il 3–fold risultante contiene 8 piani, luoghi eccezionali delle 8 proiezioni.

Deproiettando

J. Neves e N. Papadakis (2009) hanno mostrato come "deproiettare" serialmente un certo numero di spazi lineari immersi (come divisori) in una varietà proiettiva, purché essi si intersechino al più in spazi di codimensione 2.

Deproiettando

J. Neves e N. Papadakis (2009) hanno mostrato come "deproiettare" serialmente un certo numero di spazi lineari immersi (come divisori) in una varietà proiettiva, purché essi si intersechino al più in spazi di codimensione 2. Consideriamo allora \mathbb{P}^6 come un iperpiano in \mathbb{P}^7 , e costruiamo un 4-fold in \mathbb{P}^7 intersezione completa di 3 quadriche.

$$W_{222} = \{x_{00}x_{01} = x_{10}x_{11} = x_{20}x_{21} = x_{30}x_{31}\}$$

contiene 16 divisori lineari

$$H_{abcd} = \{x_{0a} = x_{1b} = x_{2c} = x_{3d}\}$$

e gli 8 spazi con $a + b + c + d$ pari, verificano la condizione.

Un Enriques-Fano

Deproiettando aggiungiamo 8 variabili y_{abcd} ($a, b, c, d \in \{0, 1\}$, $a + b + c + d$ pari) che corrispondono alle funzioni razionali su W_{222}

$$y_{abcd} = \frac{x_{1b'} x_{2c'} x_{3d'}}{x_{0a}} = \frac{x_{0a'} x_{2c'} x_{3d'}}{x_{1b}} = \dots$$

dove $\{a, a'\} = \{b, b'\} = \{c, c'\} = \{d, d'\} = \{0, 1\}$.

Un Enriques-Fano

Deproiettando aggiungiamo 8 variabili y_{abcd} ($a, b, c, d \in \{0, 1\}$, $a + b + c + d$ pari) che corrispondono alle funzioni razionali su W_{222}

$$y_{abcd} = \frac{x_{1b'} x_{2c'} x_{3d'}}{x_{0a}} = \frac{x_{0a'} x_{2c'} x_{3d'}}{x_{1b}} = \dots$$

dove $\{a, a'\} = \{b, b'\} = \{c, c'\} = \{d, d'\} = \{0, 1\}$.

Questo ci ha fornito un 4-fold in $\mathbb{P}(1^8, 2^8)$ invariante per la "naturale" azione di $(\mathbb{Z}_2\mathbb{Z})^3$ contenente le superfici cercate come intersezione della sezione iperpiana Z data dall'unica forma invariante di grado 1, con una generale forma invariante di grado 2.

Un Enriques-Fano

Deproiettando aggiungiamo 8 variabili y_{abcd} ($a, b, c, d \in \{0, 1\}$, $a + b + c + d$ pari) che corrispondono alle funzioni razionali su W_{222}

$$y_{abcd} = \frac{x_{1b'} x_{2c'} x_{3d'}}{x_{0a}} = \frac{x_{0a'} x_{2c'} x_{3d'}}{x_{1b}} = \dots$$

dove $\{a, a'\} = \{b, b'\} = \{c, c'\} = \{d, d'\} = \{0, 1\}$.

Questo ci ha fornito un 4-fold in $\mathbb{P}(1^8, 2^8)$ invariante per la "naturale" azione di $(\mathbb{Z}_2\mathbb{Z})^3$ contenente le superfici cercate come intersezione della sezione iperpiana Z data dall'unica forma invariante di grado 1, con una generale forma invariante di grado 2.

Abbiamo calcolato il gruppo fondamentale di tali superfici, che è risultato $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Un Enriques-Fano

Deproiettando aggiungiamo 8 variabili y_{abcd} ($a, b, c, d \in \{0, 1\}$, $a + b + c + d$ pari) che corrispondono alle funzioni razionali su W_{222}

$$y_{abcd} = \frac{x_{1b'} x_{2c'} x_{3d'}}{x_{0a}} = \frac{x_{0a'} x_{2c'} x_{3d'}}{x_{1b}} = \dots$$

dove $\{a, a'\} = \{b, b'\} = \{c, c'\} = \{d, d'\} = \{0, 1\}$.

Questo ci ha fornito un 4-fold in $\mathbb{P}(1^8, 2^8)$ invariante per la "naturale" azione di $(\mathbb{Z}_2\mathbb{Z})^3$ contenente le superfici cercate come intersezione della sezione iperpiana Z data dall'unica forma invariante di grado 1, con una generale forma invariante di grado 2.

Abbiamo calcolato il gruppo fondamentale di tali superfici, che è risultato $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Outline

- 1 Perché?
 - La congettura di Noether
 - Superfici di tipo generale
- 2 Cosa?
 - Botanica
 - La nostra costruzione
 - La mappa bicanonica
- 3 **Come?**
 - Un rivestimento tridoppio
 - **Un ulteriore rivestimento doppio**
 - Bibliografia

Enriques-Fano 3–folds

Gli Enriques-Fano 3-fold sono dei 3–fold di Fano che contengono una superficie di Enriques come divisore molto ampio.

Enriques-Fano 3–folds

Gli Enriques-Fano 3-fold sono dei 3–fold di Fano che contengono una superficie di Enriques come divisore molto ampio.

É noto che tali 3–fold non possono essere lisci, ma devono contenere almeno 8 singularità quoziente $\frac{1}{2}$, e il rivestimento doppio étale delle superfici di Enriques estende ad un rivestimento doppio del 3–fold ramificato esattamente sugli 8 punti doppi.

Il nostro Enriques-Fano 3–fold

Il nostro Fano 3-fold Z contiene 8 singularità quoziente $\frac{1}{2}$, gli 8 centri di proiezione. Guardando la classificazione delle Enriques-Fano 3–fold non è stato difficile riconoscere Z come quoziente della sezione iperpiana del Segre embedding di $(\mathbb{P}^1)^4$ in \mathbb{P}^{15} .

Il nostro Enriques-Fano 3–fold

Il nostro Fano 3-fold Z contiene 8 singularità quoziente $\frac{1}{2}$, gli 8 centri di proiezione. Guardando la classificazione delle Enriques-Fano 3–fold non è stato difficile riconoscere Z come quoziente della sezione iperpiana del Segre embedding di $(\mathbb{P}^1)^4$ in \mathbb{P}^{15} .

Liftando l'azione di $(\mathbb{Z}_{2\mathbb{Z}})^3$ abbiamo trovato l'azione descritta.

Outline

- 1 Perché?
 - La congettura di Noether
 - Superfici di tipo generale
- 2 Cosa?
 - Botanica
 - La nostra costruzione
 - La mappa bicanonica
- 3 **Come?**
 - Un rivestimento tridoppio
 - Un ulteriore rivestimento doppio
 - **Bibliografia**





J. Neves, R. Pignatelli,

Unprojection and deformations of Burniat surface
apparirà su Annali S.N.S.



I. Bauer, F. Catanese,

Burniat surfaces III: deformations of automorphisms and
extended Burniat surfaces
at <http://xxx.lanl.gov> as math.AG/1012.3770



Y. Chen

Two irreducible components of the moduli space of
surfaces of general type
Ph.D. Thesis, Bayreuth (2012)

Grazie per l'attenzione