

# Deformazioni di Burniat terziarie

Roberto Pignatelli

Università di Trento

in collaborazione con J. Neves (Coimbra)

XIX Congresso dell'Unione Matematica Italiana  
Bologna, 12 settembre 2011

# Superfici di tipo generale con $p_g = 0$

Sia  $S$  una superficie algebrica complessa compatta.

Se  $S$  è il modello canonico di una superficie di tipo generale con  $p_g(S) := h^0(K_S) = 0$ ,  $1 \leq K_S^2 \leq 9$ .

- Ci sono esattamente 100 tali superfici con  $K_S^2 = 9$ .
- Se  $K_S^2 = 1$ ,  $\pi_1^{alg}(S)$  è ciclico di ordine al più 5. Tutti i 5 gruppi sono possibili.
- Se  $K_S^2 = 2$ ,  $\pi_1^{alg}(S)$  è il gruppo dei quaternioni oppure abeliano di ordine al più 9. Tutti tali gruppi sono possibili.

Nel range  $3 \leq K^2 \leq 8$  conosciamo ad oggi un certo numero di esempi (vedi [BCP11]), ma siamo lontani da risultati analoghi.

# Superfici di tipo generale con $p_g = 0$ , $K^2 = 3$

Costruzioni note sono

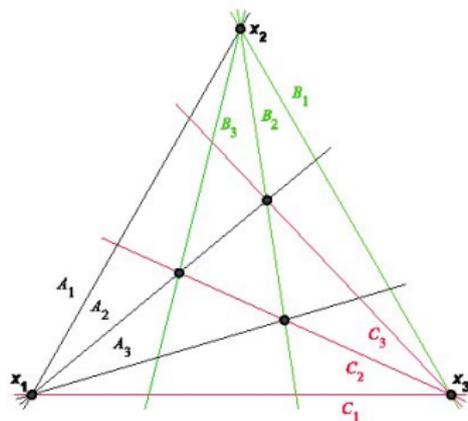
- una famiglia 1-dimensionale dovuta a Burniat (*Burniat terziarie*) con gruppo fondamentale  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}_8$  (1966);
- una famiglia dovuta a Keum con  $\pi_1 = \mathbb{Z}_{/2\mathbb{Z}}^2 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  (1994);
- esempi con  $\pi_1 = \{0\}$  o  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  [PPS08-09];
- esempi con  $\pi_1 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  ([BP10]);
- esempi con  $\pi_1 = \mathbb{Q}_8$ ,  $D_4$ ,  $D_3$ ,  $\mathbb{Z}/14\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}_{/2\mathbb{Z}}^2$ ,  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  ([CS10])

## Conjecture (M. Reid)

Se  $S$  è il modello canonico di una superficie con  $p_g = 0$  e  $K_S^2 = 3$ ,  $|\pi_1^{alg}(S)| \leq 16$

# La costruzione di Burniat

Le superfici di Burniat terziarie sono *rivestimenti bidoppi* del piano ramificati nel seguente disegno



# Un gruppo di automorfismi di $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$

Si consideri  $\mathbb{C}^8$  con coordinate  $t_{jk}$ ,  $j \in \{0 \dots 3\}$ ,  $k \in \{0, 1\}$ , e il gruppo di automorfismi  $\tilde{G}$  generato dai seguenti

$jk =$	00	01	10	11	20	21	30	31
$A_1(t_{jk}) =$	$t_{10}$	$i \cdot t_{11}$	$t_{00}$	$i \cdot t_{01}$	$t_{31}$	$-i \cdot t_{30}$	$t_{21}$	$i \cdot t_{20}$
$A_2(t_{jk}) =$	$t_{20}$	$i \cdot t_{21}$	$t_{31}$	$i \cdot t_{30}$	$t_{00}$	$i \cdot t_{01}$	$t_{11}$	$-i \cdot t_{10}$
$A_3(t_{jk}) =$	$t_{30}$	$i \cdot t_{31}$	$t_{21}$	$-i \cdot t_{20}$	$t_{11}$	$i \cdot t_{10}$	$t_{00}$	$i \cdot t_{01}$

Come al solito,  $i := \sqrt{-1}$ .

Il gruppo di automorfismi indotto su  $(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1)^4$  è isomorfo a  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}_8$ .

# Un gruppo di automorfismi di $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$

Si consideri  $\mathbb{C}^8$  con coordinate  $t_{jk}$ ,  $j \in \{0 \dots 3\}$ ,  $k \in \{0, 1\}$ , e il gruppo di automorfismi  $\tilde{G}$  generato dai seguenti

$jk =$	00	01	10	11	20	21	30	31
$A_1(t_{jk}) =$	$t_{10}$	$i \cdot t_{11}$	$t_{00}$	$i \cdot t_{01}$	$t_{31}$	$-i \cdot t_{30}$	$t_{21}$	$i \cdot t_{20}$
$A_2(t_{jk}) =$	$t_{20}$	$i \cdot t_{21}$	$t_{31}$	$i \cdot t_{30}$	$t_{00}$	$i \cdot t_{01}$	$t_{11}$	$-i \cdot t_{10}$
$A_3(t_{jk}) =$	$t_{30}$	$i \cdot t_{31}$	$t_{21}$	$-i \cdot t_{20}$	$t_{11}$	$i \cdot t_{10}$	$t_{00}$	$i \cdot t_{01}$

Come al solito,  $i := \sqrt{-1}$ .

Il gruppo di automorfismi indotto su  $(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1)^4$  è isomorfo a  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}_8$ .

Consideriamo l'immersione di Segre

$$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{15}$$

e l'azione indotta di  $\tilde{G}$  sui polinomi di  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{15}$ .

Se  $H$  è la classe della sezione iperpiana

$$\dim |H|^{\tilde{G}} = 0 \quad \dim |2H|^{\tilde{G}} = 5$$

L'unica sezione iperpiana invariante è, nella coordinate di  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ , l'ipersuperficie

$$Z_1 := \{t_{01}t_{10}t_{20}t_{30} + t_{00}t_{11}t_{21}t_{31} = 0\} \subset (\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1)^4 \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{15}$$

una 3-varietà di Fano con 6 punti doppi (localmente della forma  $\{xy = zw\} \subset \mathbb{C}^4$ ).

Consideriamo l'immersione di Segre

$$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{15}$$

e l'azione indotta di  $\tilde{G}$  sui polinomi di  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{15}$ .

Se  $H$  è la classe della sezione iperpiana

$$\dim |H|^{\tilde{G}} = 0 \quad \dim |2H|^{\tilde{G}} = 5$$

L'unica sezione iperpiana invariante è, nella coordinate di  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ , l'ipersuperficie

$$Z_1 := \{t_{01}t_{10}t_{20}t_{30} + t_{00}t_{11}t_{21}t_{31} = 0\} \subset (\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1)^4 \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{15}$$

una 3-varietà di Fano con 6 punti doppi (localmente della forma  $\{xy = zw\} \subset \mathbb{C}^4$ ).

Consideriamo l'immersione di Segre

$$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{15}$$

e l'azione indotta di  $\tilde{G}$  sui polinomi di  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{15}$ .

Se  $H$  è la classe della sezione iperpiana

$$\dim |H|^{\tilde{G}} = 0 \quad \dim |2H|^{\tilde{G}} = 5$$

L'unica sezione iperpiana invariante è, nella coordinate di  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ , l'ipersuperficie

$$Z_1 := \{t_{01}t_{10}t_{20}t_{30} + t_{00}t_{11}t_{21}t_{31} = 0\} \subset (\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1)^4 \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{15}$$

una 3-varietà di Fano con 6 punti doppi (localmente della forma  $\{xy = zw\} \subset \mathbb{C}^4$ ).

## Theorem (Neves, P)

*Sia  $Z_2 \in |2H|^{\tilde{G}} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{15}$  generica.*

*Allora  $T := Z_1 \cap Z_2$  è il modello canonico di una superficie di tipo generale con  $p_g(S) = 15$  e  $K_S^2 = 48$  su cui  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Q}_8$  agisce liberamente.*

*Il quoziente  $S := T/G$  è il modello canonico di una superficie di tipo generale con  $p_g(S) = 0$  e  $K_S^2 = 3$ .*

*Le superfici  $S$  ottenute formano una famiglia 4-dimensionale nello spazio dei moduli delle superfici di tipo generale contenente le Burniat terziarie*

Indipendentemente Bauer e Catanese [BC10], studiando le deformazioni delle superficie di Burniat, hanno costruito un'altra famiglia 4-dimensionale contenente le Burniat terziarie, e dimostrato che è un aperto proprio di una componente irriducibile dello spazio dei moduli.

## Theorem (Neves, P)

*Sia  $Z_2 \in |2H|^{\tilde{G}} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{15}$  generica.*

*Allora  $T := Z_1 \cap Z_2$  è il modello canonico di una superficie di tipo generale con  $p_g(S) = 15$  e  $K_S^2 = 48$  su cui  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Q}_8$  agisce liberamente.*

*Il quoziente  $S := T/G$  è il modello canonico di una superficie di tipo generale con  $p_g(S) = 0$  e  $K_S^2 = 3$ .*

*Le superfici  $S$  ottenute formano una famiglia 4-dimensionale nello spazio dei moduli delle superfici di tipo generale contenente le Burniat terziarie*

Indipendentemente Bauer e Catanese [BC10], studiando le deformazioni delle superfici di Burniat, hanno costruito un'altra famiglia 4-dimensionale contenente le Burniat terziarie, e dimostrato che è un aperto proprio di una componente irriducibile dello spazio dei moduli.

## Theorem (Neves, P)

*Sia  $Z_2 \in |2H|^{\tilde{G}} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{15}$  generica.*

*Allora  $T := Z_1 \cap Z_2$  è il modello canonico di una superficie di tipo generale con  $p_g(S) = 15$  e  $K_S^2 = 48$  su cui  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Q}_8$  agisce liberamente.*

*Il quoziente  $S := T/G$  è il modello canonico di una superficie di tipo generale con  $p_g(S) = 0$  e  $K_S^2 = 3$ .*

*Le superfici  $S$  ottenute formano una famiglia 4-dimensionale nello spazio dei moduli delle superfici di tipo generale contenente le Burniat terziarie*

Indipendentemente Bauer e Catanese [BC10], studiando le deformazioni delle superfici di Burniat, hanno costruito un'altra famiglia 4-dimensionale contenente le Burniat terziarie, e dimostrato che è un aperto proprio di una componente irriducibile dello spazio dei moduli.

## Theorem (Neves, P)

*Sia  $Z_2 \in |2H|^{\tilde{G}} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{15}$  generica.*

*Allora  $T := Z_1 \cap Z_2$  è il modello canonico di una superficie di tipo generale con  $p_g(S) = 15$  e  $K_S^2 = 48$  su cui  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Q}_8$  agisce liberamente.*

*Il quoziente  $S := T/G$  è il modello canonico di una superficie di tipo generale con  $p_g(S) = 0$  e  $K_S^2 = 3$ .*

*Le superfici  $S$  ottenute formano una famiglia 4-dimensionale nello spazio dei moduli delle superfici di tipo generale contenente le Burniat terziarie*

Indipendentemente Bauer e Catanese [BC10], studiando le deformazioni delle superfici di Burniat, hanno costruito un'altra famiglia 4-dimensionale contenente le Burniat terziarie, e dimostrato che è un aperto proprio di una componente irriducibile dello spazio dei moduli.

## Theorem (Neves, P)

*Sia  $Z_2 \in |2H|^{\tilde{G}} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{15}$  generica.*

*Allora  $T := Z_1 \cap Z_2$  è il modello canonico di una superficie di tipo generale con  $p_g(S) = 15$  e  $K_S^2 = 48$  su cui  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Q}_8$  agisce liberamente.*

*Il quoziente  $S := T/G$  è il modello canonico di una superficie di tipo generale con  $p_g(S) = 0$  e  $K_S^2 = 3$ .*

*Le superfici  $S$  ottenute formano una famiglia 4-dimensionale nello spazio dei moduli delle superfici di tipo generale contenente le Burniat terziarie*

Indipendentemente Bauer e Catanese [BC10], studiando le deformazioni delle superfici di Burniat, hanno costruito un'altra famiglia 4-dimensionale contenente le Burniat terziarie, e dimostrato che è un aperto proprio di una componente irriducibile dello spazio dei moduli.

# La mappa bicanonica delle nostre superfici

La mappa bicanonica  $\varphi_{|2K_S|}: S \rightarrow \mathbb{P}^3$  è un morfismo di grado 4 su una superficie cubica con, se  $S$  è generale, tre nodi.

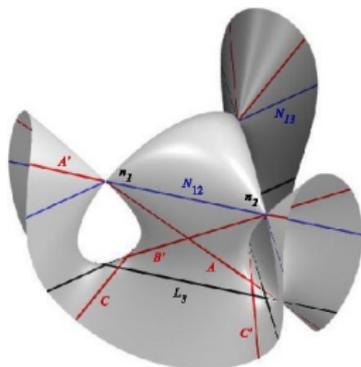
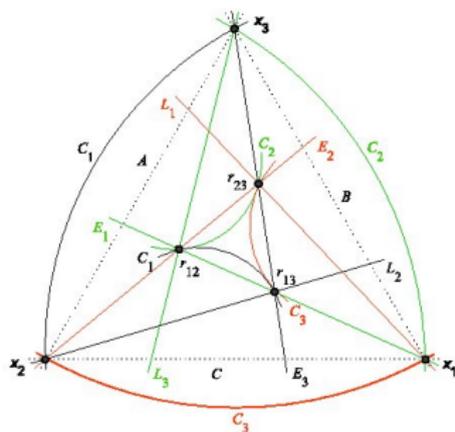


Figure: Le 12 rette di una cubica con tre nodi

$\varphi_{|2K_S|}$  è un rivestimento bidoppio, con divisori di ramificazione  $C_i + L_i$  ( $1 \leq i \leq 3$ ) dove  $L_i$  sono le rette nere in figura,  $C_i$  coniche.



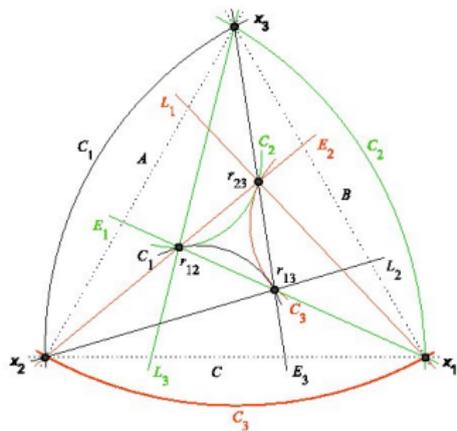
# Come rivestimento bidoppio del piano



Le rette  $N_{ij}$  si contraggono sui punti  $r_{ij}$ ,  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  sui punti  $x_i$ .  $L_i$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  sono le immagini delle omonime rette.  $E_i$  sono i divisori eccezionali ottenuti scoppiando i nodi.  $C_i$  sono coniche.

I tre divisori di ramificazione sono colorati in nero, verde e arancio. Il disegno ha 4 moduli: uno dalla disposizione dei 6 punti, uno da ciascuna conica.

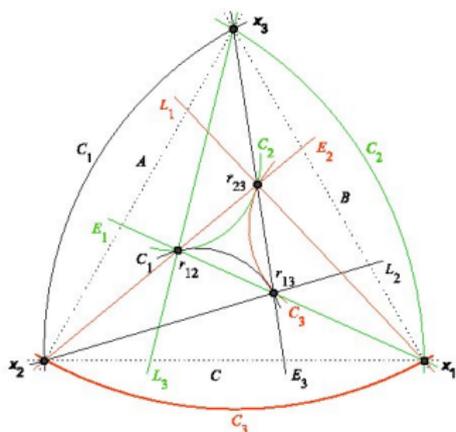
# Come rivestimento bidoppio del piano



Le rette  $N_{ij}$  si contraggono sui punti  $r_{ij}$ ,  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  sui punti  $x_i$ .  $L_i$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  sono le immagini delle omonime rette.  $E_i$  sono i divisori eccezionali ottenuti scoppiando i nodi.  $C_i$  sono coniche. I tre divisori di ramificazione sono colorati in nero, verde e arancio. Il disegno ha 4 moduli: uno dalla disposizione dei 6 punti, uno da ciascuna conica.

# Degenerando alle Burniat

Una semplice degenerazione si ottiene degenerando  $C_1$  a  $A + E_1$ ,  $C_2$  a  $B + E_2$ ,  $C_3$  a  $C + L_3$ .



Le rette  $E_i$  diventano *bicolori*: il rivestimento bidoppio descritto dal disegno è non normale. Le superfici di Burniat terziarie ne sono la normalizzazione.

# Come abbiamo trovato il gruppo di automorfismi

Cercavamo superfici con  $p_g = 0$ ,  $K^2 = 3$  aventi un rivestimento tridoppio étale  $S' \rightarrow S$ . La funzione di Hilbert suggerisce di cercare  $S'$  canonicamente immersa in  $\mathbb{P}(1^7 : 2^7)$  con una data azione di  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ .

Abbiamo cercato tali superfici  $S'$  come sezioni quadriche di una 3-varietà di Fano  $V$  in  $\mathbb{P}(1^7 : 2^8)$ . Per costruire  $V$  abbiamo usato le *deproiezioni*, costruendone prima la proiezione in  $\mathbb{P}^6$  per poi costruire  $V$  *deproiettando*. A questo punto avevamo una costruzione della famiglia.

Studiando  $V$  abbiamo notato che era una 3-varietà di Enriques-Fano, varietà che hanno un rivestimento doppio di Fano con luogo di ramificazione finito, e che sono classificate. Sollevando l'azione di  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$  al rivestimento doppio abbiamo trovato l'azione descritta.

-  J. Neves, R. Pignatelli,  
Unprojection and deformations of Burniat surface  
at <http://xxx.lanl.gov> as [math.AG/1101.3160](http://arxiv.org/abs/math/0605316)
-  I. Bauer, F. Catanese,  
Burniat surfaces III: deformations of automorphisms and  
extended Burniat surfaces  
at <http://xxx.lanl.gov> as [math.AG/1012.3770](http://arxiv.org/abs/math/0605377)
-  I. Bauer, F. Catanese, R. Pignatelli  
Surfaces of general type with geometric genus 0: a survey.  
[Complex Differential Geometry. Springer Proc. in Math. 8,](#)  
1–48

Grazie per l'attenzione